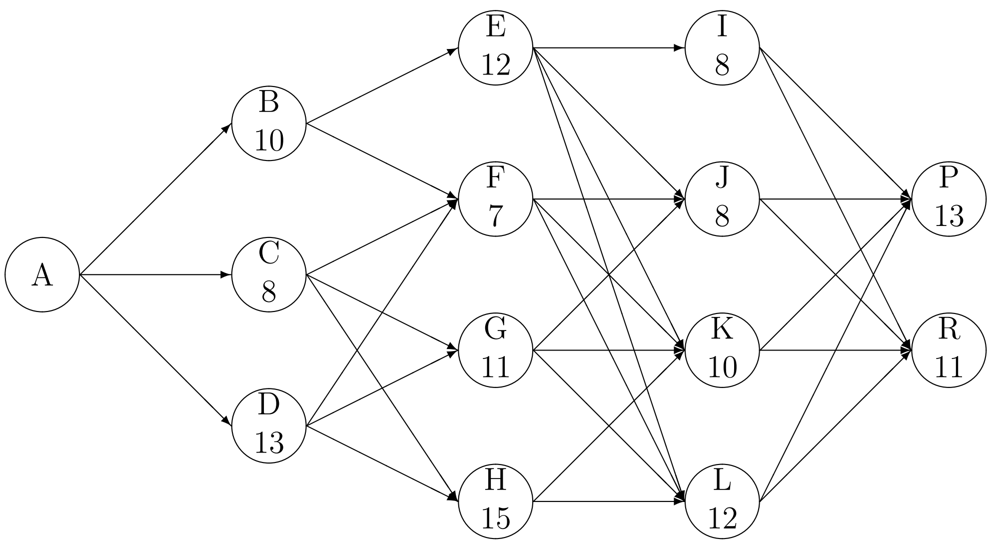
1. EVN will in NÖ Transformatoren aufstellen. Jeder Transformator kann an mehreren Stellen positioniert werden. Zwischen den Transformatoren werden Leitungen gelegt, sodaß zusätzliche Kosten entstehen (siehe Auflistung unten). In den Kreisen stehen die Kosten der Transformatoren. Finden Sie mittels Dynamischer Programmierung die kostengünstigste Variante.



Kosten für Leitungen wie folgt: $\vec{AB} = 15$, $\vec{AC} = 20$, $\vec{AD} = 8$; $\vec{BE} = 12$, $\vec{BF} = 8$; $\vec{CF} = 15$, $\vec{CG} = 10$, $\vec{CH} = 15$; $\vec{DF} = 15$, $\vec{DG} = 7$, $\vec{DH} = 10$; $\vec{EI} = 8$, $\vec{EJ} = 11$, $\vec{EK} = 7$, $\vec{EL} = 14$; $\vec{FJ} = 11$; $\vec{FK} = 8$, $\vec{FL} = 13$; $\vec{GJ} = 14$, $\vec{GK} = 8$, $\vec{GL} = 12$; $\vec{HK} = 10$, $\vec{HL} = 12$; $\vec{IP} = 12$, $\vec{IR} = 18$; $\vec{JP} = 10$, $\vec{JR} = 13$; $\vec{KP} = 16$, $\vec{KR} = 15$; $\vec{LP} = 13$, $\vec{LR} = 9$.

2. Der Besitzer von drei Lebensmittelgeschäften hat fünf Kisten frische Erdbeeren gekauft. Die geschätzte Wahrscheinlichkeitsverteilung möglicher Verkäufe der Erdbeeren vor deren Verderben ist von Geschäft zu Geschäft verschieden. Aus diesem Grund möchte der Besitzer wissen, wie er die fünf Kisten auf die drei Geschäfte aufteilen soll, um den erwarteten Gewinn zu maximieren. Aus verwaltungstechnischen Gründen möchte der Besitzer nicht Kisten zwischen Geschäften aufteilen. Er ist jedoch dazu bereit, jedem einzelnen seiner Geschäfte eventuell auch null Kisten zu liefern.

   Die folgende Tabelle gibt den geschätzten erwarteten Gewinn in jedem Geschäft, wenn entsprechende Anzahlen an Kisten geliefert werden:

Anzahl	Geschäft		
an Kisten	1	2	3
0	0	0	0
1	5	6	4
2	9	11	9
3	14	15	13
4	17	19	18
5	21	22	20

   Bestimmen Sie mittels Dynamischer Programmierung, wieviele der fünf Kisten an jede der drei Lebensmittelgeschäfte geliefert werden sollen, um den gesamten erwarteten Gewinn zu maximieren.

3. Eine Studentin hat noch 7 Tage bis zum Beginn der Abschlußprüfungen aus vier Vorlesungen, und sie möchte diese verbleibende Studierzeit so effektiv wie möglich aufteilen. Sie braucht mindestens 1 Tag für jede Vorlesung, und sie möchte sich täglich nur auf eine Vorlesung konzentrieren, daher möchte sie jeder Vorlesung 1, 2, 3 oder 4 Tage widmen. Sie beschließt, diese Aufteilung mittels Dynamischer Programmierung vorzunehmen, um die Gesamtpunkteanzahl aus den vier Vorlesungen zu maximieren. Sie schätzt die Punkteanzahl bei entsprechender Aufteilung folgendermaßen ein:

	Geschätzte Punkteanzahl			
	Kurs			
Anzahl der Lerntage	1	2	3	4
1	3	5	2	6
2	5	5	4	7
3	6	6	7	9
4	7	9	8	9

Lösen Sie dieses Problem mittels Dynamischer Programmierung.

4. Eine Firma hat gerade ein neues Produkt entwickelt. Die Manager finden heraus, daß sie ungefähr drei Monate Zeit haben, bevor ihr Hauptkonkurrent ein ähnliches Produkt auf den Markt bringt, und möchten daher so viele potentielle Kunden wie möglich erreichen. Das abzudeckende Territorium ist in fünf Verkaufsbereiche aufgeteilt. Die zusätzliche Anzahl an Kunden, die vom ersten, zweiten, dritten, etc. Verkäufer innerhalb der drei Monate erreicht werden kann, ist für jeden Verkaufsbereich in folgender Tabelle zusammengefaßt:

Anzahl der Verkäufer	Verkaufsbereich				
für Verkaufsbereich	1	2	3	4	5
1	31	36	40	28	32
2	31	33	36	25	30
3	30	31	32	24	29
4	28	24	29	22	27
5	25	20	25	12	18
6	20	14	18	8	12
7	12	9	10	0	6
8	8	0	0	0	0

(a) Die Firma hat für diese Werbung zehn Verkäufer zur Verfügung. Finden Sie mittels Dynamischer Programmierung die optimale Zuteilung der Verkäufer auf jeden Verkaufsbereich, sodaß die Anzahl der Kontakte mit potentiellen Kunden maximiert wird.

(b) Wieviele zusätzliche Kunden könnten kontaktiert werden, wenn der Firma ein bzw. zwei zusätzliche Verkäufer zur Verfügung stünden?

5. Zeigen Sie mit Hilfe der Dynamischen Optimierung für Beispiel 3.6.1 aus der Vorlesung (Konsumieren oder Investieren? Linearer Konsumnutzen, $F(u) = u$), daß es im Fall $i > r$ optimal ist, die Ausgangskapitalmenge sofort zu konsumieren.

6. Interpretieren und lösen Sie die folgende Variante des Problems von Beispiel 3.6.1 aus der Vorlesung (siehe oben):

$$\max \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\delta^n} u_n$$

unter den gegebenen Nebenbedingungen.

7. Zeigen Sie, daß die Wertfunktion

$$\lim_{N\to\infty} V_n^N(x) = V(x) = \sqrt{\frac{x}{1-\delta^2\rho}}\ , \quad \delta^2\rho < 1$$

für das Beispiel aus der Vorlesung "Konsumieren oder investieren?" mit streng konkavem (Wurzel-)Konsumnutzen $F(u) = \sqrt{u}$ die Bellman-Gleichung

$$V(x) = \max_{0\le u\le x} \{F(u) + \delta V(\rho(x-u))\}$$

erfüllt.

8. Zu betrachten sei folgendes Kaptial (x_n) – Konsum (u_n) – Problem mit endlichem Zeithorizont:

$$\max_{\{u_i\}_{i=1,\ldots,N}} \sum_{n=1}^{N} \delta^{n-1} \ln(u_n)\,,$$

$$x_{n+1} = x_n^\alpha - u_n \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Suchen Sie die optimale Kapital-Konsum-Trajektorie (x_n, u_n), wobei ein Startkapitalstock von x_1 vorgegeben ist, x_{N+1} soll gleich 0 sein.

9. Untersuchen Sie die Lösung des Konsum-Kapital-Problems (vorangegangenes Beispiel), wenn N über alle Grenzen wächst (Brock-Mirman-Problem). Wie könnte der optimale Konsumpfad bzw. der optimale Kapitalpfad für $N = \infty$ aussehen? Wie sieht die Wertfunktion $V^\infty(x)$ aus?

10. Sie möchten einen 13kg-Rucksack mit in untenstehender Tabelle aufgelisteten Artikeln füllen. Ermitteln Sie mittels Dynamischer Programmierung, wie der Rucksack gefüllt werden soll, wenn Ihr Ziel darin besteht, den Gesamtnutzen zu maximieren.

	Gewicht	**Nutzen**
Artikel 1	3kg	12
Artikel 2	5kg	25
Artikel 3	7kg	50

11. Gegeben seien 5 verschiedene Ausrüstungsgegenstände mit Gewichten g_j und Werten c_j und ein Rucksack, der nur bis zu einem Grenzgewicht $G = 38$ gefüllt werden darf.

j	1	2	3	4	5
g_j	8	16	21	17	12
c_j	8	14	16	11	7

In den Rucksack sollen jetzt solche Gegenstände eingepackt werden, sodaß er einen möglichst hohen Wert enthält.

12. Eine Elektronikfirma hat sich vertraglich dazu verpflichtet, folgende Anzahlen an Radios während der nächsten drei Monate zu liefern: Monat 1, 200 Radios; Monat 2, 300 Radios; Monat 3, 300 Radios. Für jedes während der Monate 1 und 2 produzierte Radio betragen die variablen Kosten 10\$; für jedes während Monat 3 produzierte Radio belaufen sich die variablen Kosten auf 12\$. Die Lagerhaltungskosten für jedes am Monatsende im Lager befindliche Radio liegen bei 1.50\$. Die Fixkosten, um die Produktion in einem Monat zu starten, betragen 250\$. Die während eines Monats produzierten Radios können in dem entsprechenden oder einem beliebigen zukünftigen Monat zur Auslieferung gelangen. Nehmen Sie an, daß die Produktionsmenge während jedes Monats ein Vielfaches von 100 sein muß. Bestimmen Sie mittels Dynamischer Programmierung einen optimalen Produktionsablauf unter der Voraussetzung, daß das Lager zu Beginn leer ist.

13. Der Preis eines neuen Autos beträgt 10.000\$, die jährlichen Instandhaltungskosten und Wiederverkaufswerte sind in nachstehender Tabelle angeführt. Unter der Annahme, daß Sie jetzt ein neues Auto haben, bestimmen Sie mittels Dynamischer Programmierung eine *replacement*-Politik, mit der Sie die minimalen Kosten aus Besitz und Instandhaltung eines Autos für die nächsten sechs Jahre erzielen.

Alter des Autos (Jahre)	**Wiederverkaufswert**	**Instandhaltungskosten**
1	7000\$	300\$ (Jahr 1)
2	6000\$	500\$ (Jahr 2)
3	4000\$	800\$ (Jahr 3)
4	3000\$	1200\$ (Jahr 4)
5	2000\$	1600\$ (Jahr 5)
6	1000\$	2200\$ (Jahr 6)

14. Lösen Sie das folgende LP-Problem mittels Dynamischer Programmierung.

$$\max 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

15. Lösen Sie das folgende LP-Problem mittels Dynamischer Programmierung.

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

16. Lösen Sie das folgende NLOP mittels Dynamischer Programmierung.

$$\max x_1^2 x_2$$

$$x_1^2 + x_2 \leq 2$$

17. Gegeben sei ein elektronisches System, das aus vier Komponenten besteht. Jede Komponente muß funktionieren, damit das System funktioniert. Die Zuverlässigkeit des Systems kann dadurch verbessert werden, daß mehrere parallele Einheiten in einer oder mehreren Komponenten installiert werden. Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die jeweiligen Komponenten funktionieren, wenn sie aus einer, zwei oder drei parallelen Einheiten bestehen.

Anzahl der parallelen Einheiten	Funktionswahrscheinlichkeit Komponente 1	Komponente 2	Komponente 3	Komponente 4
1	0.5	0.6	0.7	0.5
2	0.6	0.7	0.8	0.7
3	0.8	0.8	0.9	0.9

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System funktioniert, ist das Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten für das Funktionieren der jeweiligen Komponenten.

Die Kosten (in hundert Dollar) für die Installation von einer, zwei oder drei parallelen Einheiten in den jeweiligen Komponenten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Anzahl der parallelen Einheiten	Kosten in 100 \$ Komponente 1	Komponente 2	Komponente 3	Komponente 4
1	2	3	2	3
2	3	5	4	4
3	4	6	5	5

Aufgrund von Budgetbegrenzungen können maximal 1400\$ ausgegeben werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der dynamischen Optimierung, wieviele parallele Einheiten in jeder der vier Komponenten installiert werden sollen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System funktioniert, maximiert wird!

18. Ein Handelskontor muß einen fest geplanten monatlichen Bedarf b_i (einer gewissen einheitlichen Ware) befriedigen. Dazu kauft er monatlich z_i der Ware zu Kosten c_i pro Mengeneinheit ein. Er kann die Ware entweder lagern oder sofort zur Bedarfsbefriedigung weiterverkaufen. Wir setzen vereinfacht an, daß der gesamte Anfangsbestand jedes Monats Lagerkosten d_i pro Mengeneinheit verursacht. Gesucht ist eine optimale Einkaufs- bzw. Lagerpolitik, d.h. die Gesamtkosten für $n = 4$ Monate sollen minimiert werden. Die Nachfrage- und Kostenfunktionen sind durch folgende Tabelle festgelegt.

	Monate			
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4 = n$
b_i	10	10	10	10
c_i	4	3	6	4
d_i	2	2	2	2

Lösen Sie das Lagerhaltungsproblem mit Hilfe der dynamischen Programmierung unter der Annahme, daß der Anfangsbestand 0 ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Bestand am Ende des $(i-1)$-ten Monats als Zustandsvariable.

19. Ein Landwirt möchte die Gülle seiner Rinder derart auf drei Felder verteilen, daß die maximale Grundwasserverschmutzung minimiert wird. Die Menge der Gülle sei mit 1 normiert, und der Landwirt will die Jauchengrube vollständig leeren. Aufgrund der unterschiedlichen Bodenstruktur seiner Felder - während die ersten beiden Felder Lehmböden sind, setzt sich das dritte Feld aus einem sandigen Boden zusammen - erscheint eine Drittelung der Güllemenge nicht optimal, wobei die Verschmutzungsfunktionen der drei Felder wie folgt vom Landwirt vermutet werden:

$$\begin{array}{ll} \text{1. Feld:} & \frac{u_1}{\sqrt{2}}\ , \\ \text{2. Feld:} & \frac{u_2}{\sqrt{2}}\ , \\ \text{3. Feld:} & \sqrt{u_3}\ . \end{array}$$

Wie soll nun der Landwirt seine Ausbringungsmengen u_i auf dem i-ten Feld wählen, damit die maximale Grundwasserbelastung möglichst gering gehalten wird (dabei muß natürlich $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ gelten)?