20. Berechnen Sie für die folgenden Beispiele

$$h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y),$$

und zeichnen Sie den Graphen der Korrespondenz

$$G(x) := \{y \in \Gamma(x) \mid h(x) = f(x, y)\}\,.$$

(a)

$$f(x, y) = xy^2$$

$$\Gamma(x) = [-1, 1]$$

(b)

$$f(x, y) = \max\left\{2 - (y-1)^2, x + 1 - (y-2)^2\right\}$$

$$\Gamma(x) = [0, 4]$$

(c)

$$f(x, y) = \cos y$$

$$\Gamma(x) = [-|x|, |x|]$$

21. Betrachten Sie eine *Robinson Crusoe Economy*, in welcher der alleinige Entscheidungsträger die Präferenzen

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t)$$

hat.

Dem Entscheidungsträger steht in jeder Periode eine Zeiteinheit zur Verfügung. Er kann den Anteil u_t für die Produktion des Konsumgutes verwenden und $1 - u_t$ für die Akkumulation von Humankapital. Falls er Periode t mit x_t Einheiten von Humankapital beginnt, ist seine Produktionstechnologie von folgender Gestalt:

$$c_t = x_t u_t, \quad x_{t+1} = \delta x_t (1 - u_t).$$

(a) Formulieren Sie die Bellmangleichung für diesen Entscheidungsträger.

(b) Zeigen Sie, dass die Bellmangleichung eine Lösung der Form

$$v(x) = A + B \ln(x)$$

hat.

(c) Ermitteln Sie die optimale Politik (Zeitallokation).

(d) Unter welchen Voraussetzungen wird der Konsum dieses Entscheidungsträgers anhaltendes Wachstum aufweisen?

22. *Habit Persistence*

Betrachten Sie das Problem, eine Konsumfolge $\{c_t\}$ zu finden, welche

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln(c_t) + \gamma \ln(c_{t-1})] \quad 0 < \beta < 1, \gamma > 0$$

unter

$$k_{t+1} = Ak_t^{\alpha} - c_t \quad A > 0, 0 < \alpha < 1$$

mit

$$k_0 > 0, c_{-1} \quad \text{gegeben}$$

maximiert.

c_t bezeichnet dabei den Konsum zum Zeitpunkt t, während k_t für den Kapitalbestand am Beginn der Periode t steht. Die laufende Nutzenfunktion $\ln(c_t) + \gamma \ln(c_{t-1})$ ist so konstruiert, dass sie *habit persistence* im Konsum widerspiegelt.

(a) Bezeichne $v(k_0, c_{-1})$ den Wert von $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln(c_t) + \gamma \ln(c_{t-1})]$ für einen Konsumenten, der zum Zeitpunkt 0 mit dem Kapitalbestand k_0 und vorausgegangenem Konsum c_{-1} beginnt und sich optimal verhält. Formulieren Sie die Bellman'sche Funktionalgleichung in $v(k, c_{-1})$.

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung der Bellmangleichung von der Form

$$v(k, c_{-1}) = E + F \ln(k) + G \ln(c_{-1})$$

ist, und dass die optimale Politik von der Form

$$\ln(k_{t+1}) = I + H \ln(k_t)$$

ist, wobei E, F, G, H und I Konstante sind. Geben Sie explizite Formeln für die Konstanten E, F, G, H und I in Abhängigkeit von den Parametern A, β, α und γ an.

(c) Welche Eigenschaften des Problems erlauben es, dass sich der optimale Konsumplan als eine Funktion ausdrücken lässt, die nur von k_t abhängt?

23. Betrachten Sie das Wachstumsmodell von Ramsey (vgl. Beispiele 8 und 9):

$$\max_{\{c_n\}} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \ln c_n$$

unter

$$x_{n+1} = x_n^\alpha - c_n \ , \quad 0 \leq \alpha < 1$$

mit

$$x_{n+1} \in [0, x_n^\alpha] \, .$$

(a) Formulieren Sie die Eulergleichung für dieses Problem.

(b) Verifizieren Sie, dass die Eulergleichung aus (a) einen Fixpunkt hat.

(c) Verifizieren Sie, dass die aus der Politikfunktion

$$h(x) = \alpha \delta x^\alpha$$

resultierende Folge $\{x_n\}$ die Eulergleichung aus (a) erfüllt.

(d) Überprüfen Sie, ob die Transversalitätsbedingung für die Politikfunktion aus (c) erfüllt ist.

24. Betrachten Sie das Maschinen-Instandhaltungsproblem aus der Vorlesung (Bsp. 5.1.1). Berechnen Sie die stationäre Verteilung für die Politiken $u^2 = (0, 0, 1, 2)$, $u^3 = (0, 0, 2, 2)$ und $u^4 = (0, 2, 2, 2)$, und zeigen Sie (unter Verwendung der Resultate aus der Vorlesung für Politik $u^1 = (0, 0, 0, 2)$), daß die Politik u^2 optimal ist.

25. Betrachten Sie das Maschinen-Instandhaltungsproblem aus der Vorlesung (Bsp. 5.1.1). Formulieren Sie das Maschinen-Instandhaltungsproblem als LP-Problem und zeigen Sie, daß $x_{00} = \frac{2}{21}, x_{10} = \frac{5}{7}, x_{21} = \frac{2}{21}$ und $x_{32} = \frac{2}{21}$ die optimale Lösung ist. Berechnen Sie die randomisierte Politik D.

26. Betrachten Sie das Maschinen-Instandhaltungsproblem aus der Vorlesung (Bsp. 5.1.1). Ausgehend von den Ergebnissen der Vorlesung, zeigen Sie, daß die 2. Iteration des Policy-Improvement Algorithmus die Politik $u^2 = (0, 0, 1, 2)$ liefert und diese optimal ist.

27. Die Nachfrage nach einem Produkt sei durch folgende Tabelle gegeben:

Wöchentliche Nachfrage, d	0	1	2	3	4 oder mehr
Wahrscheinlichkeit, $p(d)$	0.4	0.3	0.2	0.1	0

Der Lagerbestand, welcher maximal 5 betragen kann, wird am Beginn jeder Woche kontrolliert. Jede nichterfüllte Nachfrage geht verloren.

Die Kosten setzen sich wie folgt zusammen:

(a) Lagerhaltungskosten pro Einheit: \$1

(b) Lagerersatzkosten sind fix und betragen \$3

(c) Kosten eines verlorenen Verkaufs: \$20 pro Einheit

Mittels Policy-Improvement Algorithmus bestimmen Sie die optimale Lagerhaltungspolitik, welche die durchschittlichen Kosten minimiert.

(Hinweis: Beginnen Sie mit der Politik $u_0^0 = 4$, $u_1^0 = 3$, $u_2^0 = 0$, $u_3^0 = 0$, $u_4^0 = 0$, $u_5^0 = 0$.)

28. Die Steigerungsrate des Preises von Äpfeln ist proportional zum Nachfrageüberschuss:

$$\dot{P}(t) = k\,(D(t) - S(t))\,.$$

Bestimmen Sie in den beiden folgenden Fällen den Gleichgewichtspreis. Was müssen Sie für das Vorzeichen von k annehmen, um zu garantieren, dass das Gleichgewicht stabil ist?

(a)

$$\begin{aligned} D(t) &= A - BP(t)\ , \quad A > 0\ , \quad B > 0\ , \\ S(t) &= -M + NP(t)\ , \quad M > 0\ , \quad N > 0\ . \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D(t) &= A - B\,[P(t) - 1]\ , \quad A > 0\ , \quad B > 0\ , \\ S(t) &= A + [P(t) - 1]^3\ . \end{aligned}$$

(*Hinweis:* Substituieren Sie $Q(t) = P(t) - 1$.)

29. In einer gegebenen Wirtschaft wird Kapital K gemäß der Vorschrift

$$\dot{K}(t) = sF\left(K(t), L(t)\right) - \delta K(t)$$

akkumuliert, wobei s die Sparquote beschreibt ($0 < s < 1$), δ den Abschreibungssatz bezeichnet ($\delta > 0$), und F die Produktionsfunktion ist. Sei $w > 0$ der Lohnsatz in einem großen benachbarten Land, wobei w als exogen angenommen wird. Die Arbeitskräfte L dieser Wirtschaft wachsen bzw. nehmen ab entsprechend der Differenz zwischen dem Grenzprodukt der Arbeit und w:

$$\dot{L}(t) = L(t)\left[F_L\left(K(t), L(t)\right) - w\right].$$

Wir nehmen an, dass

$$F\left(K(t), L(t)\right) = 4[K(t)L(t)]^{\frac{1}{4}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Isokline $\dot{K} = 0$ im (L, K)-Raum. Identifizieren Sie die Bereiche, wo $\dot{K} > 0$ bzw. $\dot{K} < 0$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Isokline $\dot{L} = 0$ und die Bereiche, wo $\dot{L} > 0$ bzw. $\dot{L} < 0$ gilt.

(c) Gibt es ein Gleichgewicht (L^*, K^*) mit $K^* > 0$ und $L^* > 0$? Ist es stabil?

(d) Nehmen Sie an, dass $w = 1$, $s = 0.1$, $\delta = 0.4$, und bestimmen Sie K^* und L^*. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht, und beschreiben Sie das Systemverhalten in der Nähe des Gleichgewichtes.

30. Bezeichne $K(t)$ den Kapitalstock zum Zeitpunkt t und $P(t)$ den Umweltverschmutzungsgrad. Der Output ist durch

$$Y(t) = \frac{(K(t))^{\alpha}}{1 + P(t)}$$

gegeben, wobei $0 < \alpha < 1$. Das Sparkapital ist ein konstanter Anteil des Outputs, sodass die Änderungsrate des Kapitalstocks durch

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

bestimmt wird, wobei δ den Abschreibungssatz beschreibt und s die Sparquote darstellt ($0 < s < 1$). Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass

$$s = 2\delta.$$

Der Grad der Umweltverschmutzung ändert sich gemäß der Gleichung

$$\dot{P}(t) = K(t) - P(t).$$

(a) Bestimmen Sie die Isoklinen $\dot{P} = 0$ und $\dot{K} = 0$, und identifizieren Sie im (P, K)-Raum jene Bereiche, wo $\dot{P}$ und $\dot{K}$ eindeutige Vorzeichen haben.

(b) Zeigen Sie, dass ein Gleichgewicht (P^*, K^*) existiert. Bestimmen Sie diese Gleichgewichtswerte und zeigen Sie, dass $P^* > 0$ und $K^* > 0$ gilt.

(c) Stellen Sie fest, ob für $\delta = 0.4$, $s = 0.8$ und $\alpha = 0.1$ die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht reell oder komplex sind. Beschreiben Sie das lokale Systemverhalten dieses Gleichgewichtes.

31. Betrachten Sie das folgende optimale Kontrollmodell, welches eine zeitkontinuierliche Variante des Beispiels *"Konsumieren oder Investieren?"* aus der Vorlesung darstellt:

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^\infty e^{-\delta t} \ln\left(c(t)\right) dt$$

unter

$$\dot{s}(t) = rs(t) - c(t),$$

wobei die Zustandsvariable $s(t)$ bzw. die Kontrollvariable $c(t)$ den Kapitalstock bzw. den Konsum jeweils zum Zeitpunkt t beschreibt. Nehmen Sie an, dass die Diskontierung die Verzinsung übersteigt, d.h.

$$\delta > r \geq 0.$$

(a) Formulieren Sie die Hamilton-Funktion in Momentanwertschreibweise, wobei Sie die Kozustandsvariable mit λ bezeichnen.

(b) Leiten Sie mit Hilfe der notwendigen Optimalitätsbedingungen des Pontryagin'schen Maximumprinzips das zweidimensionale kanonische System $(\dot{s}(t), \dot{c}(t))$ her.

(c) Bestimmen Sie das langfristige Gleichgewicht $(\hat{s}, \hat{c})$ und dessen lokale Stabilitätseigenschaften über die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht.

(d) Beschreiben Sie qualitativ die optimale Lösung mit Hilfe einer Phasendiagrammanalyse im (s, c)-Raum. Zeichnen Sie zu diesem Zweck die Isoklinen $\dot{s} = 0$ und $\dot{c} = 0$ ein, und benutzen Sie die Tatsache, dass Trajektorien auf der Zustandsisokline senkrecht bzw. auf der Kontrollisokline waagrecht sind.