Projekt 1: Spaltenpivotsuche vs. volle Pivotsuche

Die Matrix $\mathtt{W} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei gegeben durch

$$\mathtt{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass bei der LU-Zerlegung ohne Pivotsuche ein Eintrag $\alpha = 2^{n-1}$ entsteht und geben Sie die Matrizen L und U an.

2. Was ändert sich, wenn eine Spaltenpivotsuche durchgeführt wird? Begründen Sie.

3. Schreiben Sie eine Matlab-Funktion mit der Signatur `[W,b] = my_w(n)`, welche die obige Matrix $\mathtt{W} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}\times\mathtt{n}}$ und den Vektor $\mathtt{b} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ mit $\mathtt{b}_i = (i-1)/\mathtt{n}$, $i = 1,\dots,\mathtt{n}-\mathtt{1}$, und $b(n) = 1$ erstellt. Das System $\mathtt{W}x = \mathtt{b}$ besitzt dann die exakte Lösung $x = (-1/\mathtt{n},\dots,-1/\mathtt{n}, 1/\mathtt{n})^\top$.

4. Matlab verwendet standardmäßig bei der Berechnung der LU-Zerlegung (`lu`) Spaltenpivotsuche. Berechnen Sie für Problemgrößen $n = 1,\dots,50$ die Fehler, d.h. $\|x - \widehat{x}_{LU}\|_2$, wobei $\widehat{x}$ mittels der LU-Zerlegung erhalten wird.

5. Versuchen Sie das Verhalten qualitativ zu erklären, indem Sie folgendes Rückwärtsstabilitätsresultat verwenden: Die berechnete LU-Zerlegung einer Matrix ist die exakte LU-Zerlegung einer Matrix $A + \Delta A$ mit

   $$|\Delta A|_{ij} \le \gamma_n(|L|\,|U|)_{ij} \qquad i,j = 1,\dots,n,$$

   wobei $\gamma_n = \frac{n\mathtt{eps}}{1-n\mathtt{eps}}$. Hier ist `eps` die Maschinengenauigkeit und $|L|$, $|U|$ sind durch $(|l_{ij}|)_{ij}$ sowie $(|u_{ij}|)_{ij}$ gegeben. Vergleichen Sie zu verschiedenen Werten von n eine Norm von $\gamma_n|L||U|$ mit dem beobachteten Fehler.

6. Schreiben Sie ein Matlab-Programm, welches eine LU-Zerlegung mit voller Pivotsuche realisiert, d.h. es gibt Permutationsmatrizen P, Q sowie Matrizen L, U zurück, so daß $PAQ = LU$. Lösen Sie wiederum das ursprüngliche Gleichungssystem. Was beobachten Sie?

7. Eine Möglichkeit zur Fehlerreduktion bei ungenauer LU-Zerlegung besteht im Ausführen einer Nachiteration. Hierbei wird ausgehend von der berechneten Lösung x_0 ein Inkrement Δx als Lösung des Systems $\mathtt{W}\Delta x = \mathtt{b} - \mathtt{W}x_0$ mit Hilfe derselben LU-Zerlegung bestimmt. Die neue Lösung x_1 ergibt sich als $x_1 = x_0 + \Delta x$. Machen Sie 1-5 Nachiterationsschritte. Versuchen Sie zu erklären.