Projekt 3: Rückwärtsstabilität der LU-Zerlegung

1. Wir betrachten eine Rundungsfehleranalyse für die LU-Zerlegung auf einem Computer mit Rechengenauigkeit $\mathtt{eps}$. Zur Vereinfachung unserer Überlegungen nehmen wir an, daß die Grundrechenoperationen folgendem Modell genügen: Seien $\{+^*, -^*, *^*, /^*\}$ die Realisierungen der 4 Grundrechenarten auf dem Computer. Für zwei Gleitkommazahlen x, y gibt es ein $\delta = \delta(x,y)$ mit $|\delta| \le \mathtt{eps}$, so daß

$$x \mathtt{op}^* y = (x \,\mathtt{op}\, y)(1+\delta) \qquad \mathtt{op} \in \{+,-,*,/\}.$$

(Dies besagt, daß die Grundrechenarten rückwärtsstabil realisiert werden.)

a) Die Zahlen $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$ mögen $|\delta_i| \le \mathtt{eps}$ erfüllen und $\rho_i \in \{-1, 1\}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\theta_n \in \mathbb{R}$ mit

$$|\theta_n| \le \gamma_n := \frac{n\mathtt{eps}}{1 - n\mathtt{eps}}$$

so daß

$$\prod_{i=1}^{n} (1+\delta_i)^{\rho_i} = 1 + \theta_n.$$

Hier (und im Folgenden) ist die implizite Annahme, daß $n\mathtt{eps} < \mathtt{1}$ ist.

b) Seien $(x_i)_{i=1}^n$ und $(y_i)_{i=1}^n$ zwei Folgen von Gleitkommazahlen. Wir bezeichnen mit $\mathtt{skalar}(x,y)$ die Funktion, die das Skalarprodukt $x^\top y$ durch $\mathtt{skalar}(x,y) := s_n$ mit

$$s_1 := x_1 *^* y_1, \quad s_{i+1} := s_i +^* (x_{i+1} *^* y_{i+1}), \qquad i = 1,\dots,n-1$$

bestimmt. Zeigen Sie folgendes Rückwärtsstabilitätsresultat: Das erhaltene Ergebnis $s_n := \mathtt{skalar}(x,y)$ erfüllt für geeignet gewählte θ_n, θ_n', $\theta_{n-1}, \dots, \theta_2$:

$$s_n = x_1 y_1 (1+\theta_n) + x_2 y_2 (1+\theta_n') + x_3 y_3 (1+\theta_{n-1}) + \cdots + x_n y_n (1+\theta_2);$$

hier erfüllen alle θ_i, θ_i' die Abschätzungen $|\theta_i| \le \gamma_i$ und $|\theta_i'| \le \gamma_i$.

c) Schließen Sie auf folgendes Vorwärtsstabilitätsresultat ($|x|$ und $|y|$ sind Vektoren, bei denen die Betragsfunktion komponentenweise angewendet wurde):

$$|x^\top y - \mathtt{skalar}(x,y)| \le \gamma_n |x|^\top |y|$$

d) Seien $\widehat{L}$ und $\widehat{U}$ die Faktoren, die die LU-Zerlegung nach Crout (d.h. ohne Pivotsuche) einer Matrix A erzeugt. Überlegen Sie sich, daß gilt:

$$\begin{aligned} \left| a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{l}_{ki} \widehat{u}_{ij} - \widehat{u}_{kj} \right| &\le \max\{\gamma_1, \gamma_{k-1}\} \sum_{i=1}^{k} |\widehat{l}_{ki}|\,|\widehat{u}_{ij}|, \qquad j \ge k, \\ \left| a_{kj} - \sum_{i=1}^{k} \widehat{l}_{ki} \widehat{u}_{ij} \right| &\le \max\{\gamma_2, \gamma_{k-1}\} \sum_{i=1}^{k} |\widehat{l}_{ki}|\,|\widehat{u}_{ij}|, \qquad j < k \end{aligned}$$

Schließen Sie auf folgendes Rückwärtsstabilitätsresultat: Falls die LU-Zerlegung nach Crout nicht abbricht, dann sind die erhaltenen Faktoren $\widehat{L}$ und $\widehat{U}$ die exakte Zerlegung einer Matrix $A + \Delta A$, wobei $\Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ folgendes erfüllt:

$$|\Delta A| \le \gamma_n |\widehat{L}|\,|\widehat{U}|$$

Hier agiert wieder die Betragsfunktion in der Definition von $|\widehat{L}|$ und $|\widehat{U}|$ komponentenweise; die Ungleichung $\le$ ist ebenfalls komponentenweise zu verstehen.

2. Ziel ist zu sehen, daß das obige Rückwärtsstabilitätsresultat qualitativ richtig ist. Hierzu wird in Matlab die LU-Zerlegung in *einfacher Genauigkeit* durchgeführt (*Hinweis:* `help single`, `help eps`, `help cast`) und der Fehler $A - LU$ in doppelter Genauigkeit bestimmt.

Hierzu seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$A = W + 0.1\,\texttt{eye}(n), \qquad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a) Schreiben Sie ein Matlabprogramm, welches A bestimmt, anschließend mittels `single` auf einfache Genauigkeit konvertiert und dann die LU-Zerlegung (ebenfalls in einfacher Genauigkeit) bestimmt. Konvertieren Sie anschließend die Faktoren in “Doubles” und berechnen Sie den Fehler $A - L * U$ in doppelter Genauigkeit (hierzu müssen Sie natürlich A in den Typ “double” umwandeln). Plotten Sie semilogarithmisch für $n = 1, \dots, 50$ die Schranke $\gamma_n \texttt{norm}(|\widehat{L}|\,|\widehat{U}|)$ sowie den Fehler $\texttt{norm}(A - L * U)$. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

b) Programmieren Sie eine Gauß-Elimination mit voller Pivotsuche. Das Ergebnis ist dann eine Zerlegung $A = PLUQ$, wobei P und Q Permutationsmatrizen sind. Für die Matrizen aus Teilaufgabe a) bestimmen Sie wiederum die Zerlegung in einfacher Genauigkeit und plotten Sie wiederum semilogarithmisch den Fehler $\texttt{norm}(A - PLUQ)$ für $n = 1, \dots, 50$. Konvertieren Sie L und U in “Doubles” bevor Sie den Fehler $A - PLUQ$ bestimmen. Diskutieren Sie das Ergebnis.