Projekt 5: klassische Approximationstheorie

Ziel ist es, Approximationseigenschaften von Polynomen zu untersuchen. Insbesondere soll untersucht werden, wie klein

$$\inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|_{C([-1,1])}$$

werden kann. Wir werden sehen, daß sich dieser Ausdruck durch die Regularität von f, d.h. durch Differenzierbarkeitseigenschaften von f abschätzen läßt.

Notation: Mit $C(\mathbb{T})$ bezeichnen wir den Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ stetigen, 2π-periodischen Funktionen[1], den wir mit der Maximumsnorm

$$\|f\|_{C(\mathbb{T})} := \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

versehen. $C_{sym}(\mathbb{T})$ bezeichnet die (bzgl. dem Ursprung) symmetrischen Funktionen aus $C(\mathbb{T})$, d.h. $C_{sym}(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{T}) \,|\, f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$. Weiter führen wir den Raum T_n der trigonometrischen Polynome (vom Grad $\leq n$) und den Raum T_n^{sym} der symmetrischen trigonometrischen Polynome ein durch

$$\begin{aligned} T_n &= \left\{ x \mapsto \sum_{n=0}^{n} b_n \sin nx + a_n \cos nx \,|\, a_n, b_n \in \mathbb{R} \right\}, \\ T_n^{sym} &= T_n \cap C_{sym}(\mathbb{T}) = \left\{ x \mapsto \sum_{n=0}^{n} a_n \cos nx \,|\, a_n \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Die Approximationseigenschaften der Räume $\mathbb{P}_n$, T_n, T_n^{sym} beschreiben wir so:

$$\begin{aligned} E_n(f) &:= \inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|_{C([-1,1])} \qquad \forall f \in C([-1,1]), \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ E_n^{trig}(f) &:= \inf_{t\in T_n} \|f-t\|_{C(\mathbb{T})} \qquad \forall f \in C(\mathbb{T}) \\ E_n^{sym\,trig}(f) &:= \inf_{t\in T_n^{sym}} \|f-t\|_{C(\mathbb{T})} \qquad \forall f \in C_{sym}(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

1. Sei $f \in C([-1,1])$ und $\widehat{f} \in C(\mathbb{T})$ definiert durch $\widehat{f} : \theta \mapsto f(\cos\theta)$. Zeigen Sie: $\widehat{f} \in C_{sym}(\mathbb{T})$ und $E_n(f) = E_n^{sym\,trig}(\widehat{f})$.

2. Aufgabe 1 hat die Approximation durch (algebraische) Polynome auf eine Approximationsaufgabe mit symmetrischen trigonometischen Polynomen zurückgeführt. Ziel dieser Aufgabe ist deshalb, $E_n^{trig}(f)$ für $f \in C(\mathbb{T})$ und $E_n^{sym\,trig}(f)$ für $f \in C_{sym}(\mathbb{T})$ abzuschätzen. Dies geschieht durch konkrete Konstruktion einer Approximation $t_n \in T_n$ bzw. $t_n \in T_n^{sym}$ in Aufgabe 3 mittels der sog. Jacksonoperatoren[2]. Hier betrachten wir zuerst einen allgemeinen Rahmen für Aufgabe 3.

Für $f \in C(\mathbb{T})$ und $h > 0$ definieren wir den *Stetigkeitsmodul*

$$\omega(f,h) := \sup_{x,\in\mathbb{T},0<t<h} |f(x) - f(x+t)|$$

[1] Der Faktorraum $\mathbb{T} = \mathbb{R}/[0,2\pi)$ heißt *Torus*—für die Aufgabe ist dies jedoch nicht relevant

[2] Dunham Jackson, 1912 im Rahmen seiner Dissertation bei Landau

a) Zeigen Sie: Für λ, $h > 0$ gilt

$$\omega(f, \lambda h) \leq (1+\lambda)\omega(f,h).$$

b) Sei $K_n \in C(\mathbb{T})$ mit folgenden Eigenschaften:

$$K_n(t) \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{T} \tag{1a}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) = 1 \tag{1b}$$

$$K_n \in T_n^{sym}. \tag{1c}$$

Zeigen Sie: $J_n(f,\cdot)$ definiert durch

$$J_n(f,x) := (K_n * f)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t)\, dt$$

ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$, d.h. $J_n(f,\cdot) \in T_n$. Falls sogar $f \in C_{sym}(\mathbb{T})$, dann ist $J_n(f,\cdot) \in T_n^{sym}$.

c) Erfüllt K_n zusätzlich zu (1a)–(1c) die Bedingung

$$\int_0^{\pi} t^k K_n(t)\, dt \leq C_1 n^{-k} \qquad k = 0,1 \tag{1d}$$

für eine Konstante $C_1 > 0$, die unabhängig von n ist, so gilt:

$$|f(x) - J_n(f,x)| \leq 2C_1 \omega(f, 1/n) \qquad \forall x \in \mathbb{T}, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Wir zeigen nun, daß symmetrischen trigonometischen Polynome K_n mit den Eigenschaften (1) aus Aufgabe 2 konstruiert werden können.

a) Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$K_n(t) := \lambda_n \left(\frac{\sin mt/2}{\sin t/2}\right)^4, \qquad m := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \qquad \lambda_n > 0 \text{ so, daß} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1.$$

Überlegen Sie sich, daß $K_n \in T_n^{sym}$. Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten $C_2 > 0$ (unabhängig von n) so daß

$$C_2^{-1} n^{-3} \leq \lambda_n \leq C_2 n^{-3}$$

Hinweise: Überlegen Sie sich

$$\sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijx} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin x/2}\right)^2$$

Überlegen Sie sich, daß $x/\pi \leq \sin x/2 \leq x/2$ für $x \in [0,\pi]$ gilt.

b) Der Kern K_n ist stark bei $t = 0$ lokalisiert (Plotten Sie K_n für verschiedene Werte von n (wählen Sie der Einfachheit halber für den Plot immer λ_n so, daß $K_n(0) = 1$)!). Zeigen Sie eine quantitative Version dieser Beobachtung, indem Sie die Existenz einer Konstanten $C_3 > 0$ (unabhängig von n) nachweisen, so daß

$$\int_0^{\pi} t^k K_n(t)\, dt \leq C_3 n^{-k}, \qquad k = 0,1,2.$$

c) Schließen Sie

$$\begin{aligned} E_n^{trig}(f) &\le 2C_3\omega(f,1/n) & \forall f \in C(\mathbb{T}) \\ E_n^{sym\,trig}(f) &\le 2C_3\omega(f,1/n) & \forall f \in C_{sym}(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

4. (Rückkehr zu algebraischen Polynomen)

a) Für $f \in C([-1,1])$ und $h > 0$ definiert man den Stetigkeitsmodul $\omega(f,h)$ wie folgt:

$$\omega(f,h) := \sup_{x\in[-1,1],t\in[0,h],x+t\in[-1,1]} |f(x+t) - f(x)|$$

Zeigen Sie: Definiert man wie in Aufgabe 1 für $f \in C([-1,1])$ die Funktion $\widehat{f}$ durch $\widehat{f}(\theta) := f(\cos\theta)$, dann ist $\widehat{f} \in C_{sym}(\mathbb{T})$ und

$$\omega(\widehat{f},h) \le \omega(f,h) \qquad \forall h > 0.$$

b) Schließen Sie:

$$E_n(f) \le 2C_3\omega(f,1/n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

5. **a)** Überlegen Sie sich, daß für $f \in C^1([-1,1])$ gilt:

$$E_n(f) \le 2C_3\frac{1}{n}\|f'\|_{C([-1,1])}.$$

Zeigen Sie, daß man daraus

$$E_n(f) \le (2C_3)^k \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\|f^{(k)}\|_{C([-1,1])} \qquad \text{für } n > k \tag{2}$$

folgern kann.

b) (exponentielle Konvergenz für Polynomapproximation analytischer Funktionen). Sei $f \in C^\infty([-1,1])$ und es gebe Konstanten C_f, $\gamma_f > 0$, so daß für jedes $x \in [-1,1]$

$$|f^{(k)}(x)| \le C_f\gamma_f^k k! \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

(M.a.W.: Die Taylorreihe von f konvergiert für jedes x in einer Umgebung von x). Schließen Sie auf die Existenz von Konstanten C'_f und $q \in (0,1)$, so daß

$$E_n(f) \le C'_f q^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Koppeln Sie n und k in (2) in der Form $k \sim n$. Es reicht dann die folgende abgeschwächte Form der Stirling'schen Näherungsformel zu verwenden[3]:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le n^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

6. (Simultanapproximation) Eine Funktion $f \in C([-1,1])$ heißt hölderstetig mit (Hölder-)Exponent $\alpha \in (0,1)$, falls

$$\sup_{x,y\in[-1,1],x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Für $\alpha \in (0,1)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $C^{k+\alpha}([-1,1])$ die Menge der Funktionen $f \in C^k([-1,1])$ für die $f^{(k)}$ noch hölderstetig mit Exponent α ist. Zeigen Sie: Zu $f \in C^{k+\alpha}([-1,1])$ kann man eine Konstante $C_{f,k}$ finden und eine Folge von Polynomen $p_n \in \mathbb{P}_n$ mit

$$\|(f-p_n)^{(j)}\|_{C([-1,1])} \le C_{f,k}n^{k+\alpha-j}, \qquad j = 0,1,\ldots,k.$$

[3]der Beweis, der hier nicht verlangt wird, benötigt lediglich die Aussage $(1+1/n)^n \le e$ für alle n