

Projekt 9: Multiplikation großer Zahlen

Im Folgenden ist $p \in \mathbb{N}$ immer eine Primzahl. Wir bezeichnen mit \mathbb{Z}_p den Restklassenkörper $\{0, 1, \dots, p-1\}$ versehen mit der $\text{mod } p$ -Arithmetik.

1. Überlegen Sie sich, daß die “normalen” Rechenregeln für Potenzen gelten, d.h. für $0 \neq a$ und $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt (man setzt: $a^0 \equiv 1 \pmod p$ und a^{-1} bezeichnet die multiplikative Inverse von a)

$$a^{i+j} \equiv a^i a^j \pmod p, \quad a^{ij} = (a^i)^j.$$

- a) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $\omega \in \mathbb{Z}_p$ eine *primitive* n -te Wurzel, falls

$$\omega^n \equiv 1 \pmod p, \quad \text{und} \quad \omega^i \not\equiv 1 \pmod p, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Zeigen Sie: Ist ω eine primitive n -te Wurzel, dann sind die Zahlen $\omega^i, i = 0, \dots, n-1$, paarweise verschieden.

- b) Sei ω eine primitive n -te Wurzel. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{falls } j \not\equiv 0 \pmod n \\ n & \text{falls } j \equiv 0 \pmod n \end{cases} \quad (1)$$

- c) Zeigen Sie: Sei n gerade. Dann gilt: Falls ω eine primitive n -te Wurzel ist, dann ist ω^2 eine primitive $n/2$ -te Wurzel.

2. a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \mathbb{Z}_p$ eine n -te primitive Wurzel. Dann ist die DFT definiert als

$$\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Z}_p^n, \quad (y_j)_{j=0}^{n-1} \mapsto \mathcal{F}_n(y) := \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} y_j \right)_{k=0}^{n-1}.$$

Geben Sie \mathcal{F}_n^{-1} an.

- b) Formulieren Sie für Zweierpotenzen $n = 2^q, q \in \mathbb{N}_0$ einen FFT-Algorithmus zu schnellen Realisierung von \mathcal{F}_n . Formulieren Sie ebenfalls den IFFT-Algorithmus zur schnellen Realisierung von \mathcal{F}_n^{-1} .

3. Sei $\mathbb{Z}_{p,per}^n$ der Vektorraum (über \mathbb{Z}_p) der n -periodischen Folgen, d.h.

$$\mathbb{Z}_{p,per}^n = \{ (f_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid f_j \in \mathbb{Z}_p, \quad f_{j+n} = f_j \quad \forall j \in \mathbb{Z} \}$$

Auf $\mathbb{Z}_{p,per}^n$ definiert man die DFT wie oben:

$$\mathcal{F}_n(f) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} f_j \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

Auf $\mathbb{Z}_{p,per}^n$ definieren wir die *Faltung* $*$: $\mathbb{Z}_{p,per}^n \times \mathbb{Z}_{p,per}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{p,per}^n$ und das *Produkt* \cdot : $\mathbb{Z}_{p,per}^n \times \mathbb{Z}_{p,per}^n \rightarrow \mathbb{Z}_{p,per}^n$

$$(f * g)_j = \sum_{i=0}^{n-1} f_{j-i} g_i, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$(f \cdot g)_j = f_j g_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie den Faltungssatz:

$$\mathcal{F}_n(f * g) = \mathcal{F}_n(f) \cdot \mathcal{F}_n(g)$$

4. a) Sei $a = \sum_{i=0}^{n/2-1} a_i b^i$ und $c = \sum_{i=0}^{n/2-1} c_i b^i$. Zeigen Sie: das Produkt ac läßt sich darstellen als

$$d = \sum_{i=0}^{n-1} b^i \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{i-j} c_j \right).$$

- b) Überlegen Sie sich Bedingungen an $b = 2^m$ und $n = 2^q$, so daß die Faltungsprodukte

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{i-j} c_j, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (2)$$

die Bedingung

$$0 \leq \sum_{j=0}^i a_{i-j} c_j < p, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

erfüllen. Schließen Sie, daß sich die Faltungsprodukte (2) mit FFT-Techniken in \mathbb{Z}_p berechnen lassen.

- c) Zu gegebenem p können Sie die Multiplikation zweier Zahlen a, c bezüglich verschiedener Basen b (und damit entsprechend verschiedener Werte für n) realisieren. Wie müssen Sie b und n wählen, damit bei festem p möglichst große Zahlen multipliziert werden können?

5. Implementieren Sie die Multiplikation großer ganzer Zahlen mittels der oben gemachten Überlegungen. Prüfen Sie hierzu zuerst, daß Ihr Computer den Datentyp `unsigned int` mit mindestens 32 bit darstellt. Es werden bei der Multiplikation auch Zwischenergebnisse auftreten, die 64 bit benötigen. Testen Sie deshalb, ob der Datentyp `unsigned long int` bzw. `unsigned long long int` 64 bit (d.h. 8 Byte) zur Verfügung gestellt wird¹

Unter <http://www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/numerik.WS0708/projekte> finden Sie ein kleines C++-Programm (mit Hinweisen, wie es in ein C-Programm einzubinden ist), welches Dezimalzahlen aus einer Datei einliest und als Vektor von Ziffern bezüglich einer gewählten Basis b umwandelt.

Für die Realisierung benötigen Sie eine Primzahl p und die n -te Einheitswurzel ω . Verwenden Sie hierzu:

$$\begin{aligned} n_{max} &:= 134.217.728 = 2^{27} \\ m_{max} &:= 15 \\ p &:= 15 \cdot 2^{27} + 1 = 2.013.265.921 \\ \omega_{max} &:= 440.564.289 = n_{max}\text{-te Wurzel; gegeben durch } \omega_{max} = 31^{15} \pmod{p} \\ 2^{-1} &= 1.006.632.961 \pmod{p} \end{aligned}$$

Sollten Sie keine 64 bit-Zahlen vom typ `long int` oder `long long int` haben, dann verwenden Sie folgende Werte:

$$\begin{aligned} n_{max} &:= 1.024 = 2^{10} \\ m_{max} &:= 7 \\ p &:= 25 \cdot 2^{10} + 1 = 25.601 \\ \omega_{max} &:= 12.725 = n_{max}\text{-te Wurzel; gegeben durch } \omega_{max} = 3^{25} \pmod{p} \\ 2^{-1} &= 12.801 \pmod{p} \end{aligned}$$

¹dies Testen Sie mit einem kleinen C-Programm und Befehlen von der Art `sizeof(long long int)`.

- a) Schreiben Sie die Routine, die zu gegebenem $n = 2^q \leq n_{max}$ eine primitive n -te Wurzel ω von 1 bestimmt und alle weiteren Potenzen von ω , die die FFT und die IFFT benötigen.
- b) Schreiben Sie Programme für die FFT, die IFFT sowie für die effiziente Faltung von Folgen auf $\mathbb{Z}_{p,per}^n$. Hierbei werde pro Folgenglieder eine Variable vom Typ `unsigned int` verwendet.
- c) Schreiben Sie ein Programm, welches die Multiplikation von zwei großen ganzen Zahlen realisiert. Diese Zahlen seien in der Basis b darstellt und mögen jeweils $N/2$ Ziffern haben (N ist natürlich² eine Zweierpotenz).

Gehen Sie in zwei Schritten vor: Berechnen Sie zuerst die Faltungsprodukte. Anschließend wollen Sie das Produkt ac wieder in der Basis b darstellen. Schreiben Sie hierzu eine Routine, die aus der Folge $(\sum_{j=0}^{n-1} a_{i-j}b_j)_{i=0}^{n-1}$ eine neue Folge $(d_i)_{i=0}^{n-1}$ erzeugt, so daß $0 \leq d_i < b$ für alle i und

$$\sum_{i=0}^{n-1} b^i \sum_{j=0}^{n-1} a_{i-j}c_j = \sum_{i=0}^{n-1} b^i d_i.$$

6. Machen Sie Zeitmessungen für Ihr Programm mit wachsendem n (und festem b). Sehen Sie das erwartete Verhalten?

²das ist so in der Informatik