Projekt 9: summierte Trapezregel und adaptive Quadratur

Ziel sind: besseres Verständnis der Eigenschaften der summierten Trapezregel, Grundzüge von adaptiven Quadraturstrategien.

1. **a)** Geben Sie eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und eine Konstante $c > 0$ an, so daß für die summierte Trapezregel $T(h)$ gilt: $\left|\int_0^1 f(x)\,dx - T(h)\right| \geq ch^2$.

b) Zeigen Sie: Die summierte Simpsonregel entsteht in der Spalte $n = 1$ bei Romberg-Extrapolation der summierten Trapezregel für $h_i = \frac{b-a}{2^i}$, $i = 0, \ldots$.

2. Wie in Aufg. 1 gezeigt, kann man bei der summierten Trapezregel keine Konvergenz erwarten, die besser als $O(h^2)$ ist. Eine Ausnahme bildet die Integration von *periodischen* Funktionen, wie wir jetzt zeigen.

Betrachten Sie die summierte Trapezregel auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ angewandt auf trigonometrische Polynome.

a) Sei $f \in C^{2m+2}(\mathbb{R})$ und 2π-periodisch. Zeigen Sie: die Trapezregel $T(h)$ mit Schrittweite $h = \frac{2\pi}{N}$ $(N \in \mathbb{N})$ erfüllt

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - T(h)\right| \leq C_m h^{2m+2} \|f^{(2m+2)}\|_{C([0,2\pi])}$$

für eine Konstante $C_m > 0$, die nur von $m \in \mathbb{N}_0$ abhängt.

b) Werten Sie die Integrale $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ mittels der summierten Trapez- und Simpsonregel (dies entspricht einem Extrapolationsschritt) für $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = \sin^2 x$ aus. Was beobachten Sie? Wann ist Extrapolation sinnvoll?

c) Zeigen Sie: Die summierte Trapezregel mit Schrittweite $h = \frac{2\pi}{N}$ ist exakt für trigonometrische Polynome vom Grad $n < N$, d.h.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - T(h) = 0 \qquad \forall f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

Hinweis: Betrachten Sie die summierte Trapezregel angewandt auf $x \mapsto e^{\mathbf{i}kx}$ für $-n \leq k \leq n$.

d) Zeigen Sie folgendes Approximationsresultat: Für $h = \frac{2\pi}{N}$ und jedes $f \in C([0, 2\pi])$ gilt

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - T(f)\right| \leq 4\pi \inf_{p \in T_{N-1}} \|f - p\|_{C([0,2\pi])},$$

wobei T_{N-1} der Raum der trigonometrischen Polynome from Grad $N - 1$ ist.

e) Zeigen Sie, daß für $f(x) = e^{\sin x}$ die summierte Trapezregel exponentiell (in N) konvergiert, d.h. es existieren $C > 0$, $q \in (0, 1)$ so daß

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x) - T(h)\right| \leq Cq^N, \qquad h = \frac{2\pi}{N}.$$

Plotten Sie den Quadraturfehler der summierten Trapezregel und der summierte Simpsonregel für $N = 2, \ldots, 11$. Es gilt: $\int_0^{2\pi} e^{\sin x}\,dx \approx 7.9549265210128452745$. Beschreiben Sie Ihr Ergebnis.

3. Sei $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ ein Gitter auf dem Intervall $[x_0, x_n]$. Sei $h_i := x_{i+1} - x_i$ die Länge des i-ten Teilintervalls $I_i = (x_i, x_{i+1})$. Mit $I_\Delta : C([x_0, x_n]) \to S^1(\Delta)$ bezeichnen wir den nodalen Interpolationsoperator, d.h. $I_\Delta f \in S^1(\Delta)$ ist gekennzeichnet durch die Bedingungen:

$$(I_\Delta f)|_{I_i} \in \mathcal{P}_1, \qquad (I_\Delta f)(x_i) = f(x_i) \qquad \forall i.$$

Für ein Intervall $[a, b]$ definieren wir weiter $\|u\|_{L^1([a,b])} := \int_a^b |u(x)|\,dx$. Im folgenden bezeichnet $C > 0$ immer eine Konstante, die nicht von Δ, f und i abhängt.

a) Zeigen Sie: Ist $f|_{I_i} \in C^1(I_i) \cap C(\overline{I}_i)$ und gilt $\|f'\|_{L^1(I_i)} < \infty$, so ist:

$$\begin{aligned} \|(I_\Delta f)'\|_{L^1(I_i)} &\leq \|f'\|_{L^1(I_i)} \\ \|f - I_\Delta f\|_{L^1(I_i)} &\leq C h_i \|f'\|_{L^1(I_i)}. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Ist $f|_{I_i} \in C^2(\overline{I_i})$, so gilt

$$\|f - I_\Delta f\|_{L^1(I_i)} \leq C h_i^2 \|f''\|_{L^1(I_i)}.$$

4. (graduierte Gitter) Sei $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, $I = (0, 1)$. $I_\Delta : C([0, 1]) \to S^1(\Delta)$ bezeichnet wie in Aufg. 3 den nodalen Interpolationsoperator.

a) Sei $\Delta_{unif} = \{i/n, i = 0, \dots, n\}$ ein uniformes Gitter. Zeigen Sie:
$\|f - I_{\Delta_{unif}} f\|_{L^1(I)} \leq C n^{-(\alpha+1)}$ für ein $C > 0$, das nicht von n abhängt.

b) Sei Δ_{unif} das uniforme Gitter aus Teilaufg. a). Zeigen Sie:
$\|f - I_{\Delta_{unif}} f\|_{L^1(I)} \geq C n^{-(\alpha+1)}$ für ein $C > 0$, das nicht von n abhängt.

c) Sei $\Delta_{grad} = \{(i/n)^\beta, i = 0, \dots, n\}$ mit $\beta = 2/\alpha$.
Zeigen Sie: $\|f - I_{\Delta_{grad}} f\|_{L^1(I)} \leq C n^{-2}$ für ein $C > 0$.

d) Progammieren Sie die summierte Trapezregel für allgemeine Gitter Δ. Für $f(x) = x^\alpha$, $\alpha = 0.1$, und $n = 2^i$, $i = 1, \dots, 12$ plotten Sie doppelt logarithmisch den Quadraturfehler der summierten Trapezregel gegen die Anzahl n der Teilintervalle im Fall des uniformen Gitters Δ_{unif} und des graduierten Gitters Δ_{grad}. Welche Konvergenz (Fehler gegen n) beobachten Sie? Erklären Sie.

Hinweis für c): Zeigen Sie $h_i \leq C n^{-1} x_i^{1-1/\beta}$ ($i \geq 1$, $C > 0$ geeignet) und verwenden Sie

$$\|f - I_\Delta f\|_{L^1(I_0)} \leq C h_0 \|f'\|_{L^1(I_0)}, \qquad \|f - I_\Delta f\|_{L^1(I_i)} \leq C h_i^2 \|f''\|_{L^1(I_i)}, \quad i \geq 1.$$

5. Aufg. 4 zeigt, daß die summierte Trapezregel bei richtiger Wahl des Gitters das optimale Konvergenzverhalten $O(N^{-2})$ (Fehler gegen Funktionsauswertungen) erreichen kann. In der Praxis ist ein *adaptiver* Algorithmus, der automatisch das Gitter erzeugt, besser. Eine Rohfassung eines adaptiver Algorithmus ist in Fig. 1 dargestellt (hier bezeichnet $T([a, b])$ die Trapezregel für das Intervall $[a, b]$ und $S([a, b])$ die Simpsonregel). Ein sinnvolles Abbruchkriterium ist

$$|I_1 - I_2| \leq \tau \text{ oder } |I_1| \leq \tau I, \tag{1}$$

wobei I eine positive Zahl von der Größenordnung des gesuchten Integralwertes ist.

a) Programmieren Sie einen adaptiven Quadraturalgorithmus zur Auwertung von $\int_a^b f(x)\,dx$, der auf den obigen Ideen beruht. Eingabeparameter für die Quadraturroutine sollen τ, a, b, I. Ausgabeparameter sollen den Integralwert, der geschätze Fehler und die Anzahl benötigter Teilintervalle sein.
Hinweis: in MATLAB kann es notwendig sein, mit `set(0,'RecursionLimit',10000)` die Rekursionstiefe zu erhöhen.

```
adapt(f, a, b, τ)
I_1 := T([a,b])       %Approximation an ∫_a^b f(x) dx
I_2 := S([a,b])    %``bessere'' Approximation an ∫_a^b f(x) dx
if Abbruchkriterium erfüllt return(I_1)
else { % gewünschte Genauigkeit nicht erreicht → unterteile [a,b] in [a,m], [m,b]
      m := (a+b)/2
      return( adapt(f, a, m, τ/2) + adapt(f, m, b, τ/2))
}
```

Abbildung 1: Grundform eines adaptive Algorithmus

b) Verwenden Sie Ihren Quadraturalgorithmus zur Bestimmung von $\int_0^1 x^{0.1}\,dx$. Verwenden Sie als Toleranzen $\tau = 10^{-n}$, $n = 1, \ldots, 8$ und $I = 1$. Plotten Sie doppelt logarithmisch den geschätzen und den tatsächlichen Quadraturfehler über den Anzahl benötigter Teilintervalle. Plotten Sie im gleichen Bild auch die Kurve $N \mapsto N^{-2}$.

c) Ihr adaptiver Algorithmus "akzeptiert" den Wert der Trapezregel. Sinnvoller ist es, den Wert der Simsponregel zu akzeptieren. Modifizieren Sie Ihr Programm entsprechend und wiederholen Sie die Rechnung aus Teilaufg. b).