Serie 1

Besprechung: in der Woche vom 6.10.08

1.1. Zeigen Sie den Taylorschen Satz in der folgenden Form:
Sei (a,b) ein Intervall und $x_0 \in (a,b)$. Sei $f \in C^{n+1}(a,b)$. Dann gilt für h mit $a - x_0 < h < b - x_0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + R_n(h) \tag{1}$$

mit

$$R_n(h) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0 + h - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Insbesondere gilt für jedes h mit $a - x_0 < h < b - x_0$, daß

$$|R_n(h)| \le \frac{1}{n!}h^{n+1} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

falls sogar $f^{(n+1)} \in C([a,b])$.

1.2. Betrachten Sie zu gegebenem $a > 0$ und Startwert $x_0 > 0$ die Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$, die durch die Vorschrift

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \qquad \Phi(x) := x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

entsteht.

a) Geben Sie die möglichen Grenzwerte der erzeugten Folge an.

b) (quadratische Konvergenz) Es möge die Folge gegen $x^* > 0$ konvergieren. Entwickeln Sie die Funktion Φ um x^* in eine Taylorreihe bis (einschließlich) linearem Glied. Zeigen Sie, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$|x_{n+1} - x^*| \le C|x_n - x^*|^2 \qquad \forall n \ge 0.$$

Wovon hängt die Konstante C ab?

1.3. Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$. Für $I = [a,b]$ und $N \in \mathbb{N}$ sei $h := (b-a)/N$. Setze $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, N$.

a) Definieren Sie die Rechtecksregel

$$R(h) := \sum_{i=0}^{N-1} hf(x_i)$$

als Approximation an $\int_a^b f(x)\,dx$. Geben Sie eine Zahl $C > 0$ an, für die Sie

$$|\int_a^b f(x)\,dx - R(h)| \le Ch \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

zeigen können. *Hinweis:* $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ und schätzen Sie mittels Taylor $|f(x_i + \xi) - f(x_i)|$ für $\xi \in (0,h)$ ab

b) Definieren Sie als Approximation an $\int_0^1 f(x)\,dx$ die "unorthodoxe" Quadraturregel durch

$$U(h) := \sum_{i=0}^{N-1} h\left[f(x_i) + \alpha h f'(x_i)\right].$$

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß es eine von h unabhängige Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - U(h)\right| \le Ch^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$, entwickeln Sie die Funktion f in eine Taylorreihe um x_i (bis zu einem geeigneten Glied) und integrieren Sie die Taylorreihe.