Serie 2

Besprechung: in der Woche vom 13.10.08

2.1. (schriftlich) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt SPD, wenn sie symmetrisch (d.h. $A^\top = A$) und positiv definit ist (d.h. $x^\top Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Sei im folgenden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ SPD.

a) Zeigen Sie: A ist regulär und $A_{ii} > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

b) Zeigen Sie: $|A_{ij}| \le 1/2(A_{ii} + A_{jj})$. Folgern Sie, daß $\max_{ij} |A_{ij}| = \max_i A_{ii}$.

c) Zeigen Sie: Jede Hauptuntermatrix $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ist regulär. A hat eine LU-Zerlegung.

2.2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *strikt diagonal dominant*, wenn

$$\sum_{j\neq i} |A_{ij}| < |A_{ii}| \qquad \forall i.$$

Zeigen Sie: eine strikt diagonal dominante Matrix hat eine LU-Zerlegung.

2.3. Anstelle einer LU-Zerlegung wird oft auch eine LDU-Zerlegung konstruiert, d.h. $A = LDU$, wobei $L \in \mathcal{L}_n^1$, $U^\top \in \mathcal{L}_n^1$, und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Diagonalmatrix.

a) Zeigen Sie: falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär ist und eine LU-Zerlegung hat, so hat es eine LDU-Zerlegung. Diese ist eindeutig.

b) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung der LDU-Zerlegung einer Matrix A.

c) Bestimmen Sie die Anzahl arithmetischer Operationen zum Berechnen der LDU-Zerlegung.

d) Formulieren Sie einen Algorithmus zum Lösen des LGS $Ax = b$ mittels LDU-Zerlegung.

2.4. (Skyline-Struktur) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *Skyline-Matrix*, falls es Zahlen p_i, $q_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, n$, gibt, so daß für die i-te Zeile von A gilt: $A_{ij} = 0$ für $j < i - p_i$ und für die j-te Spalte von A gilt: $A_{ij} = 0$ für $i < j - q_j$. Es möge die reguläre Matrix A eine LU-Zerlegung haben. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß die Faktoren L und U die Skyline-Struktur "erben", d.h. $L_{ij} = 0$ für $j < i - p_i$ und $U_{ij} = 0$ für $i < j - q_j$. Fig. 1 zeigt ein Beispiel für die Aussage dieses Satzes.

2.5. (Block-LU-Zerlegung) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Faktoren L und U der LU-Zerlegung einer *Bandmatrix* wiederum Bandmatrizen (mit den Bandbreiten von A) sind. Insbesondere sind für Tridiagonalmatrizen A die Faktoren L und U Bidiagonalmatrizen. In dieser Aufgaben wird diese Beobachtung auf Blockmatrizen übertragen.

$m \times m$-Blockmatrizen mit Blöcken der Größe n sind Matrizen von der Form $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$ mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $i, j = 1, \ldots, m$. Die Matrix A ist eine Blocktridiagonalmatrix, falls $A_{ij} = 0$ für $|i - j| \ge 2$. Im folgenden sei A eine solche Block-Tridiagonalmatrix.

a) Zeigen Sie: falls A eine LU-Zerlegung besitzt, so hat es eine Block-LU-Zerlegung, wobei die Faktoren $L = (L_{ij})_{i,j=1}^m$ und $U = (U_{ij})_{i,j=1}^m$ Block-Bidiagonalmatrizen sind. Genauer: $L_{ij} = 0$ falls $j > i$ oder $j \le i - 2$ und $U_{ij} = 0$ falls $i > j$ oder $i \le j - 2$. Zudem gilt für die Diagonalblöcke $L_{ii} \in \mathcal{L}_n^1$.

b) Formulieren Sie einen Algorithmus, der die Block-LU-Zerlegung berechnet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & 2 & 2 \\ & & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 18 \\ & 4 & 5 & 29 & 48 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \\ & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & 2 & 2 \\ & & 1 & 3 & 3 \\ & & & 1 & 4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

Abbildung 1: $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Hier ist: $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = p_5 = 3$, $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, $q_4 = 2$, $q_5 = 4$.