Serie 3

Besprechung: in der Woche vom 20.10.08

3.1. (Cholesky-Zerlegung)

a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ SPD. Dann ist die Cholesky-Zerlegung eindeutig, d.h. $\exists!\ L \in \mathcal{L}_n$ mit $L_{ii} > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *hermitesch*. Zeigen Sie folgende Äquivalenz: A ist SPD $\iff$ der in der Vorlesung angegebene Algorithmus zur Bestimmung des Cholesky-Faktors "läuft durch" (d.h. er bricht nicht ab, weil durch Null dividiert wird oder die Wurzel einer negativen Zahl gezogen werden soll).

3.2. In der Vorlesung wurde ein Algorithmus zur Berechnung des Choleskyfaktors L einer SPD-Matrix formuliert. Zeigen Sie, daß der folgende Algorithmus ebenfalls den Choleskyfaktor berechnet, indem er den unteren Teil der Matrix A mit ihrem Choleskyfaktor überschreibt:

for $k = 1, \ldots, n$
  $A(k,k) = \sqrt{A(k,k)}$
  $A(k+1:n,k) = A(k+1:n,k)/A(k,k)$
  for $j = k+1, \ldots, n$
    $A(j:n,j) = A(j:n,j) - A(j:n,k)A(j,k)$
  end
end

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $L = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}$ für Blöcke L_{11}, L_{12}, L_{22} geeigneter Dimension.

3.3. (**Programmieraufgabe**) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `[t_chol, t_row, t_col] = zeit_chol(A)` welches die Rechenzeiten für die Choleskyzerlegung der voll besetzten SPD-Matrix A zurückgibt. Dabei soll die Choleskyzerlegung a) mittels des MATLAB-Befehls `chol`, b) mittels des Algorithmus aus der Vorlesung (wobei Sie die Summen MATLAB-angemessen mittels Skalarprodukten realisieren) und c) mittels des Algorithmus aus Aufg. 3.2 bestimmt werden. Die Zeitmessung erfolgt in MATLAB mittels `tic` und `toc`.

Testen Sie Ihr Programm, indem Sie für SPD-Matrizen der Größen $N = 2^n$, $n = 1, \ldots, 11$ die benötigten Rechenzeiten doppelt logarithmisch gegen N auftragen (`help loglog`). Sehen Sie ein $O(N^3)$-Verhalten? Können Sie sich erklären, warum die Variante aus Aufg. 3.2 besser ist als die aus der Vorlesung?

3.4. (Matrixnormen) Seien $\|\cdot\|_n$, $\|\cdot\|_m$, $\|\cdot\|_p$ Normen auf den Vektorräumen $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^p$. Auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^{n\times m}$ der $n \times m$-Matrizen wird $\|A\|_{n\times m} := \sup_{0\neq x\in\mathbb{K}^m} \frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_m}$ definiert. Zeigen Sie:

a) $\|\cdot\|_{n\times m}$ stellt tatsächlich eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ dar.

b) $\|AB\|_{n\times m} \leq \|A\|_{n\times p}\|B\|_{p\times m}$, falls $A \in \mathbb{K}^{n\times p}$ und $B \in \mathbb{K}^{p\times m}$.

c) Für die Identitätsmatrix I gilt: $\|I\|_{n\times n} = 1$ und für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär gilt $\|A^{-1}\|_{n\times n} \geq \frac{1}{\|A\|_{n\times n}}$.

3.5. (**schriftlich**) Definiere auf $\mathbb{K}^n$ die Normen $\|x\|_{\ell^1} := \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_{\ell^\infty} := \max_i |x_i|$, $\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

a) Zeigen Sie: $\|x\|_{\ell^2} \leq \sqrt{\|x\|_{\ell^1}\|x\|_{\ell^\infty}}$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$.

b) Seien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ die von den Normen $\|\cdot\|_{\ell^1}$, $\|\cdot\|_{\ell^2}$, $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ induzierten Matrixnormen. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \|A^H\|_\infty &= \|A\|_1 \\ \|A\|_2^2 &= \lambda_{max}(A^H A), \qquad \lambda_{max}(A^H A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist EW von } A^H A\} \\ \|A\|_2^2 &\leq \|A\|_1\|A\|_\infty. \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\lambda x = A^H A x$ für geeignetes λ, x.

c) Zeigen Sie für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, daß $\max_{i,j=1,\ldots,n} |A_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j=1,\ldots,n} |A_{ij}|$.