Serie 5

Besprechung: in der Woche vom 3.11.08

5.1. **a)** Sei $LU = PA$ die LU-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenpivotsuche. Offensichtlich ist $\max_{i,j} |L_{ij}| \leq 1$. Zeigen Sie: $\max_{i,j} |U_{ij}| \leq 2^n \max_{i,j} |A_{ij}|$.

b) Betrachten Sie die Matrix W aus (1). Zeigen Sie, dass bei der LU-Zerlegung ohne Pivotsuche ein Eintrag $\alpha = 2^{n-1}$ entsteht und geben Sie die Matrizen L und U an.

c) Was ändert sich, wenn eine Spaltenpivotsuche durchgeführt wird? Begründen Sie.

5.2. Wir haben Pivotsuche bei LU-Zerlegungen dadurch motiviert, daß die Einträge von L (und U) ggf. groß sein können, obwohl die Einträge von A nicht groß sind. Zeigen Sie, daß dies bei der Cholesky-Zerlegung nicht auftritt, genauer: Es gilt für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ SPD, daß die Einträge des Choleskyfaktors L die Abschätzung $l_{ik}^2 \leq a_{ii}$ für alle i, k erfüllen.

5.3. (**Programmieraufgabe**) Die Matrix $\mathtt{W} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und das LGS $Wx = b$ seien gegeben durch

$$\mathtt{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-2 \\ n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Schreiben Sie eine MATLAB-Routine $x = \mathtt{nachiteration}(A, L, U, b, nr)$, die das Lösen des LGS $Ax = b$ mit nr Nachiterationsschritten realisiert, wobei L und U vorhandene (Approximationen an die) Faktoren der LU-Zerlegung von A sind. D.h.: x_0 ist gegeben als Lösung von $LUx_0 = b$ und die Approximation x_{k+1} mit $k+1$ Nachiterationsschritten ergibt sich aus x_k durch $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$, wobei Δx_k die Lösung von $LU\Delta x_k = r_k := b - Ax_k$ ist.

Schreiben Sie ein MATLABprogramm $[err0, err1, err5] = \mathtt{serie5}(nmax)$, welches die LGS $Wx = b$ für $n = 1, \dots, nmax$ mit $nr = 0$, $nr = 1$ und $nr = 5$ löst (*Hinweis*:`help lu`). Die Rückgabevektoren $err0$, $err1$, $err5$ enthalten die Spektralnormen der tatsächlichen Fehler, die die drei verwendeten Lösungsmethoden machen. Das Programm soll ferner die Fehler gegen die Problemgröße n semilogarithmisch (`semilogy`) plotten. Diskutieren Sie die erhaltenen Kurven für $nmax = 100$.

5.4. Sei $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine Permutation. Es bezeichne $e_k \in \mathbb{R}^n$ den k-ten Einheitsvektor

a) Zeigen Sie: $P_\pi^{-1} = P_\pi^\top$, wobei P_π die zu π gehörige Permutationsmatrix ist.

b) Sei $L^{(k)} = I - l_k e_k^\top$, wobei $l_k \in \mathbb{R}^n$ nur Einträge in den Zeilen $k+1, \dots, n$ hat. Sei π eine Permutation, die die ersten k Einträge unverändert läßt, d.h. $\pi(i) = i$ für $i = 1, \dots, k$. Zeigen Sie: $\widehat{L}^{(k)} := P_\pi^{-1} L^{(k)} P_\pi$ hat die Form $\widehat{L}^{(k)} = I - \widehat{l}_k e_k^\top$, wobei der Vektor $\widehat{l}_k$ die Einträge $(\widehat{l}_k)_i = (l_k)_{\pi^{-1}(i)}$ hat.

c) Die LU-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche erzeugt ein $U \in \mathcal{U}_n$ indem in jedem Schritt zuerst ein Zeilentausch und dann ein Eliminationsschritt gemacht wird, d.h. $U = L^{(n-1)} P_{\pi_{n-1}} L^{(n-2)} P_{\pi_{n-2}} \cdots L^{(1)} P_{\pi_1} A$, wobei die Permutationen π_k so sind, daß $\pi_k(i) = i$ für $i = 1, \dots, k-1$ und die Matrizen $L^{(k)}$ jeweils den Gaußschritt realisieren. Zeigen Sie, daß sich daraus eine Zerlegung $U = \widehat{L}^{(n-1)} \cdots \widehat{L}^{(1)} PA$ ergibt, wobei die Matrizen $\widehat{L}^{(k)} \in \mathcal{L}_n^1$ aus den Matrizen $L^{(k)}$ dadurch entstehen, daß lediglich in der k-ten Spalten die Einträge (in den Zeilen $k+1, \dots, n$) permutiert werden; P ist eine Permutationsmatrix.

5.5. **a)** Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $Q = \mathrm{Id}_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^\top$ die zugehörige Householder-Reflexion. Zeigen Sie: Q ist symmetrisch ($Q^\top = Q$), Q ist orthogonal ($Q^\top = Q^{-1}$) und Q ist involutorisch ($Q^2 = \mathrm{Id}_n$).

b) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und a nicht parallel zu e_1. Sei $\alpha := \pm\|a\|_2$, $v = a - \alpha e_1$. Rechnen Sie nach, daß bei beiden Wahlen des Vorzeichens bei α für die Householder-Reflexion $Q = \mathrm{Id}_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^\top$ gilt: $Qa = \alpha e_1$.

5.6. (**schriftlich**) Householdertransformationen sind Matrizen, die sich von der Identität um eine Rang-1 Matrix unterscheiden. Zeigen Sie folgenden allgemeineren Zusammenhang für invertierbare $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und u, $v \in \mathbb{R}^n$:

a) Falls $v^\top A^{-1} u \neq -1$, dann gilt

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + v^\top A^{-1} u} A^{-1} uv^\top A^{-1}.$$

b) Falls $v^\top A^{-1} u = -1$, dann ist $A + uv^\top$ nicht invertierbar (*Hinweis:* Finden Sie einen Vektor $z \neq 0$ mit $(A + uv^\top)z = 0$).

c) Sei $LU = A$ die LU-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Formulieren Sie einen Algorithmus, der mit Aufwand $O(n^2)$ das LGS $(A + uv^\top)x = b$ löst.