Serie 6

Besprechung: in der Woche vom 10.11.08

6.1. (**Programmieraufgabe**) Schreiben Sie MATLABprogramme `[Q,R] = my_qr(A)`, `y = apply_Q(Q,b)` und `x = solve_with_qr(A,b)`, die folgendes leisten. Die Routine `my_qr` erzeugt eine QR-Zerlegung von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist und $Q \in \mathbb{K}^{n\times n-1}$ die $n-1$ Householdervektoren enthält, d.h. setzt man $Q_k := I - 2q_k q_k^H$ mit $q_k := Q(:,k)$, so ist $A = \widetilde{Q}R$ mit $\widetilde{Q} := Q_1 \cdots Q_{n-1}$. Die Funktion `apply_Q(Q,b)` liefert $\widetilde{Q}^H b$, wobei die Matrix $Q \in \mathbb{K}^{n\times n-1}$ das Ergebnis von `my_qr` ist. Schließlich realisiert `solve_with_qr` das Lösen des LGS $Ax = b$ mittels Ihrer QR-Zerlegung. Schreiben Sie zum Testen Ihrer Routinen ein MATLABprogramm `err = serie6(n)`, das folgendes macht: es erzeugt eine zufällige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen zufälligen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Anschließend löst es das LGS $Ax = b$ mittels der obigen Routinen und mittels des MATLABgleichungslösers. Der Rückgabewert `err` ist die Norm der Differenz der beiden erhaltenen Lösungen.

6.2. Zeigen Sie, daß die QR-Zerlegung *mit Pivotsuche* die Diagonaleinträge r_{ii} der (verallgemeinerten) oberen Dreiecksmatrix R dem Betrag nach sortiert, d.h. $|r_{11}| \geq |r_{22}| \geq \cdots$

6.3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Für eine Matrix C bezeichnet $\sigma(C) \subset \mathbb{C}$ ihr Spektrum, d.h. die Menge der Eigenwerte. Zeigen Sie: $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$.

6.4. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\operatorname{rang}(A) = r$. Seien $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ die nichttrivialen Singulärwerte von A. Zeigen Sie für A und seine Moore-Penrose Pseudoinverse A^+, daß gilt: $\|A\|_2 = \sigma_1$, $\|A^+\|_2 = \sigma_r^{-1}$.

6.5. Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnet $\|A\|_F^2 := \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ die *Frobeniusnorm*.

a) Zeigen Sie für Matrizen Q mit orthonormalen Spalten, daß gilt: $\|QA\|_F^2 = \|A\|_F^2$ (hier muß natürlich QA gebildet werden können).

b) Seien $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{m,n\}}$ die Singulärwerte von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie: $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2$.

6.6. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ mit $\operatorname{rang}(A) = r$ und $A = U\Sigma V^\top$ eine SVD von A. Setze $\widetilde{U}_k := U(:,[1:k])$, $\widetilde{V}_k := V(:,[1:k])$, $\Sigma_k := \Sigma([1:k],[1:k])$.

a) Zeigen Sie, daß für $k \leq r$ die Matrix $A_k := \widetilde{U}_k \Sigma_k \widetilde{V}_k^\top$ den Rang k hat. *Hinweis:* Zeigen Sie, daß der Span der Spalten von $\widetilde{U}_k$ gleich dem Bild von A_k ist.

b) Zeigen Sie, daß für $k < r$ gilt: $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

c) Zeigen Sie, daß für $k < r$ die Matrix A_k die *beste* Rang-k-Approximation an A ist, d.h.

$$\min\{\|A - B\|_2 \,|\, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit } \operatorname{rang}(B) = k\} = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Hinweis: überlegen Sie sich, daß es für jedes $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang}(B) = k$ einen *nichttrivialen* Vektor $z \in \operatorname{Ker}(B) \cap \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ gibt (Hier sind $v_1, \ldots, v_{k+1}$ die Spalten von $\widetilde{V}_{k+1}$.) Zeigen Sie dann $\|Az\|_2 \geq \sigma_{k+1}\|z\|_2$ und betrachten Sie $\|(A - B)z\|_2$.

6.7. Für lineare "Gesetze" $y = mx + c$ können mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate aus Meßwerten (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$ $(N \geq 2)$ die Parameter m, c bestimmt werden.

a) definieren Sie die Funktion $R(m,c) := \sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + c))^2$. Ihr Minimum ist durch die Bedingungen $\frac{\partial R(m,c)}{\partial m} = 0$ und $\frac{\partial R(m,c)}{\partial c} = 0$ gekennzeichnet. Zeigen Sie, daß diese Bedingungen auf die Normalengleichung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate führt.

b) Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist auch für manche nichtlinearen Gesetze einsetzbar. Überlegen Sie sich, wie Sie aus Meßdaten (t_i, y_i), $i = 1, \dots, N$ die Parameter k, C aus dem Gesetz $y(t) = Ce^{-kt}$ bestimmen können. Wie können Sie bei einem Gesetz $y(t) = Ct^{\alpha}$ vorgehen, um C und α zu bestimmen?

c) Schreiben Sie ein MATLABprogramm `serie6_7(nmin, nmax)`, welches Für $N = 2^n$, $n = nmin, \dots, nmax$, zufällige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ erzeugt und ihre QR-Zerlegung mittels Ihrer Routine `my_qr` bestimmt. Bestimmen Sie die benötigte Zeit $t(N)$ (mittels `tic`, `toc` oder `cputime`). Plotten Sie doppelt logarithmisch (`help loglog`) die benötigte Zeit gegen die Problemgröße N. Für große N sollte $t(N) \approx CN^{\alpha}$ sein. Bestimmen Sie α mittels der in Teilaufg. b) entwickelten Methode und der MATLAB-Funktion `polyfit`. Verwenden Sie $nmin = 6$, $nmax = 11$.

6.8. **(schriftlich)** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *symmetrisch* mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie folgende Charakterisierung des k-ten Eigenwertes:

$$\lambda_k = \min_{\substack{S \subset \mathbb{R}^n \\ \dim S = n-k+1}} \max_{0 \neq x \in S} \frac{x^\top A x}{\|x\|_2^2}.$$

Hinweis: Seien v_k, $k = 1, \dots, n$ die zugeh. Eigenvektoren. Betrachten Sie die Räume $S_k := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ und $S'_k := \operatorname{span}\{v_k, \dots, v_n\}$. Überlegen Sie sich weiterhin, warum Sie für jedes S mit $\dim S = n - k + 1$ ein $x \in S \cap S_k$ finden können.