Serie 8

Besprechung: in der Woche vom 24.11.08

8.1. (**schriftlich**) Seien $-1 \le x_0 < x_1 < \cdots x_n \le 1$ Knoten. $I_n : C([-1,1]) \to \mathcal{P}_n$ bezeichnet den Interpolationsoperator in den Knoten und Λ_n die zugehörige Lebesguekonstante. Zeigen Sie folgende Aussagen:

$$\|I_n f\|_{C([-1,1])} \le \Lambda_n \|f\|_{C([-1,1])} \qquad \forall f \in C([-1,1]) \tag{1}$$

$$\exists f \in C([-1,1]) \text{ sodass } \|I_n f\|_{C([-1,1])} = \Lambda_n \|f\|_{C([-1,1])} \tag{2}$$

$$I_n v = v \qquad \forall v \in \mathcal{P}_n \tag{3}$$

8.2. (Hermiteinterpolation) Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Knoten. Für jeden Knoten x_i sei $m_i \in \mathbb{N}_0$ gewählt. Setze $N := \sum_{i=0}^n (m_i + 1)$ und $m := \max_i m_i$. Die Hermitesche Interpolationsaufgabe lautet: Finde $p \in \mathcal{P}_{N-1}$, so daß $f^{(j)}(x_i) = p^{(j)}(x_i)$ für $j = 0, \ldots, m_i$ und $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie: für $f \in C^m(\mathbb{R})$ ist die Hermitesche Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar.

8.3. Seien ξ_i, $i = 0, \ldots, n$ paarweise verschiedene Knoten in $[-1,1]$. Sei $\psi : [-1,1] \to [a,b]$ die affine Bijektion und $x_i := \psi(\xi_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Mit $\Lambda_n^{[-1,1]}$ und $\Lambda_n^{[a,b]}$ bezeichnen wir die Lebesguekonstanten für die Knoten $(\xi_i)_{i=0}^n$ bzw. $(x_i)_{i=0}^n$ bzgl. der Intervalle $[-1,1]$ und $[a,b]$.

a) Zeigen Sie: $\Lambda_n^{[a,b]} = \Lambda_n^{[-1,1]}$.

b) Zeigen Sie: Für $f \in C^{n+1}([a,b])$ gilt für den Interpolanten $I_n^{[a,b]} f$, der f in den Knoten $(x_i)_{i=0}^n$ interpoliert

$$\|f - I_n^{[a,b]} f\|_{C([a,b])} \le (1 + \Lambda_n) \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{C([a,b])}, \qquad h = b - a.$$

8.4. Seien $x_i \in [a,b]$,$i = 0, \ldots, n$ paarweise verschiedene Knoten und Λ_n die zugehörige Lebesguekonstante. Setze $f_i := f(x_i)$. Sei $p \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom, das die Werte (x_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$ interpoliert. Seien die Zahlen $\widetilde{f}_i$ Approximationen an die Werte f_i. Sei $\widetilde{p} \in \mathcal{P}_n$ das Polynom, daß die Werte $(x_i, \widetilde{f}_i)$, $i = 0, \ldots, n$, interpoliert. Geben Sie eine Abschätzung für $\|p - \widetilde{p}\|_{C([a,b])}$ an.

8.5. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t)\, dt$ wird an den äquidistanten Punkten $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, tabelliert, wobei $h = 1/n$. Sei s_1 die stückweise lineare Interpolation, d.h. $s_1|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathcal{P}_1$ (für $i = 0, \ldots, n-1$) und $s_1(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie $\|f - s_1\|_{C([0,1])} \le \frac{1}{8} h^2$. Seien nun die Zahlen $\widetilde{f}_i$ Approximationen an die Werte $f(x_i)$ und entsprechend $\widetilde{s}_1$ die stückweise lineare Interpolation durch die Knoten $(x_i, \widetilde{f}_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Wie genau müssen die Approximationen $\widetilde{f}_i$ sein, damit $\|f - \widetilde{s}_1\|_{C([0,1])} \le \frac{1}{4} h^2$ ist?

8.6. Sei $q \in (0,1)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie c_0, $c_1 \in \mathbb{R}$ so, daß

$$c_0 f(h) + c_1 f(qh) = f(0) + O(h^2), \qquad h \to 0.$$

Vergleichen Sie (für fest gedachtes h) die linke Seite mit dem Wert $p(0)$, wobei $p \in \mathcal{P}_1$ die Werte $(h, f(h))$, $(qh, f(qh))$ interpoliert.

b) Sei $h_i = q^i h$, $i = 0, \ldots, n$. Die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$ sind so, daß

$$\forall a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \quad \text{gilt:} \quad \sum_{i,j=0}^n c_i a_j h_i^j = a_0$$

Zeigen Sie, daß die $c_0, \ldots, c_n$ eindeutig bestimmt sind. Zeigen Sie, daß $\sum_{i=0}^n c_i f(q^i h) = f(0) + O(h^{n+1})$. Zeigen Sie weiters, daß $\sum_{i=0}^n c_i f(q^i h) = p(0)$, wobei $p \in \mathcal{P}_n$ die Werte $(h_i, f(h_i))$, $i = 0, \ldots, n$ interpoliert.

8.7. Betrachten Sie das Nevilleschema für die Romberg-Extrapolation (Stützstellen $x_i = q^i x_0$ mit $q \in (0,1)$) angewandt auf die Auswertung $F := \lim_{x\to 0} f(x)$. Die Einträge des Schemas mögen mit F_{in} bezeichnet sein. Definieren Sie *Fehlerindikatoren*, die den relativen Fehler $\varepsilon(i,n) := |F - F_{in}|/|F|$ abschätzen sollen, durch

$$\varepsilon_1(i,n) := \frac{|F_{i+1\ n} - F_{in}|}{|F_{i+1\ n}|}, \qquad \varepsilon_2(i,n) := \frac{|F_{i-1\ n+1} - F_{in}|}{|F_{i-1\ n+1}|}.$$

Nehmen Sie an, daß $F - F_{in} \approx C_n q^{i(n+1)}$ gilt für ein $C_n > 0$, das unabhängig von i ist. Wie verhält sich $\varepsilon_j(i,n)/\varepsilon(i,n)$ für $i \to \infty$ für $j = 1, 2$.

8.8. (**Programmieraufgabe**) Es soll $f'(0)$ durch Extrapolation der Differenzenquotienten $D(h) := \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ und $D_{sym}(h) := \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}$ bestimmt werden. Schreiben Sie Programme [F] = `extrapol_einseitig(f,n,q)` und [F] = `extrapol_symmetrisch(f,n,q)`, die die Extrapolationstableaus zurückgeben. Die Tableaus beruhen auf der Auswertung der Funktionen D und D_{sym} in den Punkten $h_i = q^i$, $i = 0, \ldots, n$.

Schreiben Sie weiters eine Funktion `serie8(n)`, die das Konvergenzverhalten der Extrapolation untersucht. Die Funktion erzeugt 3 Graphen (`figure(1)`, `figure(2)`, `figure(3)`). Setzen Sie $q = 0.1$, $n = 15$, `h = q.^[0:n]`. Weiters ist $f(x) = \sin(x + \pi/4)$ und $g(x) = |x|^{3/2}$. Ferner ist

```
F = extrapol_einseitig(f,n,q),
Fsym = extrapol_symmetrisch(f,n,q),
G = extrapol_einseitig(g,n,q),
err_f1(:) := abs(F([1:n+1],1) - f'(0)),
err_f2(:) := abs(F([1:n],2) - f'(0)),
err_f3(:) := abs(F([1:n-1],3) - f'(0)),
err_sym1(:) := abs(Fsym([1:n+1],1) - f'(0))
err_sym2(:) := abs(Fsym([1:n],2) - f'(0))
err_sym3(:) := abs(Fsym([1:n-1],3) - f'(0))
err_g1(:) := abs(G([1:n+1],1) - g'(0))
err_g2(:) := abs(G([1:n],2) - g'(0))
err_g3(:) := abs(G([1:n-1],3) - g'(0))
```

- `figure(1)`: `loglog(h([1:n+1],err_f1),'*-',h([1:n]),err_f2,'*--',h([1:n-1]),err_f3,'*-.')`
- `figure(2)`: `loglog(h([1:n+1],err_fsym1),'*-',h([1:n]),err_fsym2,'*--',h([1:n-1]),err_fsym3,'*-.')`
- `figure(3)`: `loglog(h([1:n+1],err_g1),'*-',h([1:n]),err_g2,'*--',h([1:n-1]),err_g3,'*-.')`

Was beobachten Sie? Erklären Sie.