

Serie 1

Besprechung: in der Woche vom 5.10.09

1.1. Zeigen Sie den Taylorsche Satz in der folgenden Form:

Sei (a, b) ein Intervall und $x_0 \in (a, b)$. Sei $f \in C^{n+1}(a, b)$. Dann gilt für h mit $a - x_0 < h < b - x_0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + R_n(h) \quad (1)$$

mit

$$R_n(h) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0 + h - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Insbesondere gilt für jedes h mit $a - x_0 < h < b - x_0$, daß

$$|R_n(h)| \leq \frac{1}{n!} |h|^{n+1} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

falls sogar $f^{(n+1)} \in C([a, b])$.

1.2. Betrachten Sie zu gegebenem $a > 0$ und Startwert $x_0 > 0$ die Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$, die durch die Vorschrift

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad \Phi(x) := x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

entsteht.

- a) Geben Sie die möglichen Grenzwerte der erzeugten Folge an.
- b) (quadratische Konvergenz) Es möge die Folge gegen $x^* > 0$ konvergieren. Entwickeln Sie die Funktion Φ um x^* in eine Taylorreihe bis (einschließlich) linearem Glied. Zeigen Sie, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^2 \quad \forall n \geq 0.$$

Wovon hängt die Konstante C ab?

1.3. Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$. Für $I = [a, b]$ und $N \in \mathbb{N}$ sei $h := (b - a)/N$. Setze $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$.

- a) Definieren Sie die Rechtecksregel

$$R(h) := \sum_{i=0}^{N-1} hf(x_i)$$

als Approximation an $\int_a^b f(x) dx$. Geben Sie eine Zahl $C > 0$ an, für die Sie

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R(h) \right| \leq Ch \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

zeigen können. *Hinweis:* $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ und schätzen Sie mittels Taylor $|f(x_i + \xi) - f(x_i)|$ für $\xi \in (0, h)$ ab

- b) Definieren Sie als Approximation an $\int_0^1 f(x) dx$ die "unorthodoxe" Quadraturregel durch

$$U(h) := \sum_{i=0}^{N-1} h [f(x_i) + \alpha h f'(x_i)].$$

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß es eine von h unabhängige Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\left| \int_a^b f(x) dx - U(h) \right| \leq Ch^2 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$, entwickeln Sie die Funktion f in eine Taylorreihe um x_i (bis zu einem geeigneten Glied) und integrieren Sie die Taylorreihe.