Serie 2

Abgabe: bis Fr., 09.10.08, 12 Uhr bei Frau Kovalj

2.1. **(schriftlich)** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt SPD, wenn sie symmetrisch (d.h. $A^\top = A$) und negativ definit ist (d.h. $x^\top Ax < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Sei im folgenden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ SPD.

- **a)** Zeigen Sie: A ist regulär und $A_{ii} < 0$ für $i = 1,\dots,n$.
- **b)** Zeigen Sie: $|A_{ij}| \le -1/2(A_{ii} + A_{jj})$. Folgern Sie, daß $\max_{ij}|A_{ij}| = \max_i |A_{ii}|$.
- **c)** Zeigen Sie: Jede Hauptuntermatrix $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ist regulär. A hat eine LU-Zerlegung.

2.2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *strikt diagonal dominant*, wenn

$$\sum_{j\neq i} |A_{ij}| < |A_{ii}| \qquad \forall i.$$

Zeigen Sie: eine strikt diagonal dominante Matrix hat eine LU-Zerlegung.

2.3. Anstelle einer LU-Zerlegung wird oft auch eine LDU-Zerlegung konstruiert, d.h. $A = LDU$, wobei $L \in \mathcal{L}^1_n$, $U^\top \in \mathcal{L}^1_n$, und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Diagonalmatrix.

- **a)** Zeigen Sie: falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär ist und eine LU-Zerlegung hat, so hat es eine LDU-Zerlegung. Diese ist eindeutig.
- **b)** Formulieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung der LDU-Zerlegung einer Matrix A.
- **c)** Bestimmen Sie die Anzahl arithmetischer Operationen zum Berechnen der LDU-Zerlegung.
- **d)** Formulieren Sie einen Algorithmus zum Lösen des LGS $Ax = b$ mittels LDU-Zerlegung.

2.4. Sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, invertierbare obere Dreiecksmatrix; seien u, $v \in \mathbb{R}^n$. Sei

$$A = \left(\begin{array}{c|c} R & v \\ \hline u^T & 0 \end{array}\right)$$

- **a)** Geben Sie eine LU-Zerlegung von A an.
- **b)** Zeigen Sie: A ist genau dann regulär, wenn $u^\top R^{-1} v \neq 0$.
- **c)** Formulieren Sie einen Algorithmus zur Lösung des LGS $Ax = b$ für gegebenes $b \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wie groß ist der Aufwand?

2.5. In der VO wurde die LU-Zerlegung so konstruiert, daß L "Spalte für Spalte" und U "Zeile für Zeile" erzeugt wird. Formulieren Sie einen Algorithmus, der L "Zeile für Zeile" und U "Spalte für Spalte" aufbaut. *Hinweis:* Ansatz

$$\begin{pmatrix} L' & 0 \\ z^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & v \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & A \\ b^\top & c \end{pmatrix}$$

für Matrizen L', U' und Vektoren z, v und Skalar ρ.