Serie 3

Abgabe: bis Fr., 16.10.09, 12 Uhr bei Frau Kovalj

3.1. (**schriftlich**) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *Skyline-Matrix*, falls es Zahlen p_i, $q_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, n$, gibt, so daß für die i-te Zeile von A gilt: $A_{ij} = 0$ für $j < i - p_i$ und für die j-te Spalte von A gilt: $A_{ij} = 0$ für $i < j - q_j$. Es möge die reguläre Matrix A eine LU-Zerlegung haben. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß die Faktoren L und U die Skyline-Struktur "erben", d.h. $L_{ij} = 0$ für $j < i - p_i$ und $U_{ij} = 0$ für $i < j - q_j$.

3.2. (**Programmieraufgabe**) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm $[\texttt{t\_chol}, \texttt{t\_row}, \texttt{t\_col}] = \texttt{zeit\_chol(A)}$ welches die Rechenzeiten für die Choleskyzerlegung der voll besetzten SPD-Matrix A zurückgibt. Dabei soll die Choleskyzerlegung a) mittels des MATLAB-Befehls `chol`, b) mittels des Algorithmus aus der Vorlesung (wobei Sie die Summen MATLAB-angemessen mittels Skalarprodukten realisieren) und c) mittels des Algorithmus aus Aufg. 3.4 bestimmt werden. Die Zeitmessung erfolgt in MATLAB mittels `tic` und `toc`.

Schreiben Sie ein Programm `serie3_2(nmax)`, welches für $N = 2^n$, $n = 1, \dots, nmax$ zufällige SPD-Matrizen erzeugt und für diese `zeit_chol` aufruft und anschließend die benötigten Rechenzeiten doppelt logarithmisch gegen N aufträgt (`help loglog`). Verwenden Sie $nmax = 11$. Sehen Sie ein $O(N^3)$-Verhalten? Können Sie erklären, warum die Variante aus Aufg. 3.4 besser ist als die aus der VO?

3.3. (Block-LU-Zerlegung) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Faktoren L und U der LU-Zerlegung einer *Bandmatrix* wiederum Bandmatrizen (mit den Bandbreiten von A) sind. Insbesondere sind für Tridiagonalmatrizen A die Faktoren L und U Bidiagonalmatrizen. In dieser Aufgaben wird diese Beobachtung auf Blockmatrizen übertragen.

$m \times m$-Blockmatrizen mit Blöcken der Größe n sind Matrizen von der Form $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$ mit $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $i, j = 1, \dots, m$. Die Matrix A ist eine Blocktridiagonalmatrix, falls $A_{ij} = 0$ für $|i - j| \geq 2$. Im folgenden sei A eine solche Block-Tridiagonalmatrix.

a) Zeigen Sie: falls A eine LU-Zerlegung besitzt, so hat es eine Block-LU-Zerlegung, wobei die Faktoren $L = (L_{ij})_{i,j=1}^m$ und $U = (U_{ij})_{i,j=1}^m$ Block-Bidiagonalmatrizen sind. Genauer: $L_{ij} = 0$ falls $j > i$ oder $j \leq i - 2$ und $U_{ij} = 0$ falls $i > j$ oder $i \leq j - 2$. Zudem gilt für die Diagonalblöcke $L_{ii} \in \mathcal{L}_n^1$.

b) Formulieren Sie einen Algorithmus, der die Block-LU-Zerlegung berechnet. Zeigen Sie, daß die Anzahl W arithmetischer Operationen zum Bestimmen der Block-LU-Zerlegung einer Abschätzung der Form $W \leq Cn^3 m$ für eine Konstante $C > 0$, die nicht von n, m abhängt.

3.4. In der Vorlesung wurde ein Algorithmus zur Berechnung des Choleskyfaktors L einer SPD-Matrix formuliert. Zeigen Sie, daß der folgende Algorithmus ebenfalls den Choleskyfaktor berechnet, indem er den unteren Teil der Matrix A mit ihrem Choleskyfaktor überschreibt:

for $k = 1, \dots, n$
    $A(k,k) = \sqrt{A(k,k)}$
    $A(k+1:n,k) = A(k+1:n,k)/A(k,k)$
    for $j = k+1, \dots, n$
        $A(j:n,j) = A(j:n,j) - A(j:n,k)A(j,k)$
    end
end

3.5. Zur Erinnerung: die Notation $O(f(x))$, $x \to x_0$ bezeichnet eine Funktion $\widetilde{f}$ mit der Eigenschaft, daß es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von x_0 und eine Konstante $c > 0$ gibt, so daß $|\widetilde{f}(x)| \leq C|f(x)|$ für alle $x \in \mathcal{U}$. Analog verfährt man mit "einseitigen" Annäherungen, d.h. $x \to x_0+$ oder $x \to x_0-$.

a) Bestimmen Sie $a > 0$, $b < 0$ so, daß $\arctan z = a + O(z^b)$, $\quad z \to +\infty$. (*Hinweis:* $\arctan z = \int_0^z (1+t^2)^{-1}\,dt$)

b) Geben Sie eine (einfache) Funktion $h(x)$ an, so daß

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}\,dt = h(x) + O(1), \qquad x \to 0+.$$