Serie 4

Abgabe: bis Fr., 23.10.09, 14 Uhr bei Frau Kovalj

4.1. (**schriftlich**) Seien $\|\cdot\|_n$, $\|\cdot\|_m$, $\|\cdot\|_p$ Normen auf den Vektorräumen $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^p$. Auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^{n\times m}$ der $n\times m$-Matrizen wird $\|A\|_{n\times m} := \sup_{0\neq x\in\mathbb{K}^m} \frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_m}$ definiert. Zeigen Sie:

a) $\|\cdot\|_{n\times m}$ stellt tatsächlich eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ dar.

b) $\|AB\|_{n\times m} \leq \|A\|_{n\times p}\|B\|_{p\times m}$, falls $A\in\mathbb{K}^{n\times p}$ und $B\in\mathbb{K}^{p\times m}$.

c) Für die Identitätsmatrix I gilt: $\|I\|_{n\times n} = 1$ und für $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ regulär gilt $\|A^{-1}\|_{n\times n} \geq \frac{1}{\|A\|_{n\times n}}$.

d) Definieren Sie auf dem Vektorraum der $n\times m$-Matrizen die *Frobeniusnorm* $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j}|A_{ij}|^2}$. Seien n und $m\geq 2$ und versehen Sie die Räume $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ mit der $\|\cdot\|_{\ell^p}$-Norm $\left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$. Zeigen Sie: Es gibt kein $p\in(1,\infty)$, so daß $\|\cdot\|_F$ von der Norm $\|\cdot\|_{\ell^p}$ induziert wird.

e) $\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ is EW von } B\}$ heißt Spektralradius von B. Zeige: $B\mapsto\rho(B)$ ist keine Norm.

4.2. Definiere auf $\mathbb{K}^n$ die Normen $\|x\|_{\ell^1} := \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_{\ell^\infty} := \max_i |x_i|$, $\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

a) Zeigen Sie: $\|x\|_{\ell^2} \leq \sqrt{\|x\|_{\ell^1}\|x\|_{\ell^\infty}}$ für alle $x\in\mathbb{K}^n$.

b) Seien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ die von den Normen $\|\cdot\|_{\ell^1}$, $\|\cdot\|_{\ell^2}$, $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ induzierten Matrixnormen. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \|A^H\|_\infty &= \|A\|_1 \\ \|A\|_2^2 &= \lambda_{max}(A^HA), \qquad \lambda_{max}(A^HA) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist EW von } A^HA\} \\ \|A\|_2^2 &\leq \|A\|_1\|A\|_\infty. \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\lambda x = A^HAx$ für geeignetes λ, x.

c) Zeigen Sie für $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$, daß $\max_{i,j=1,\dots,n}|A_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n\max_{i,j=1,\dots,n}|A_{ij}|$.

4.3. Betrachten Sie das Polynom

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + a, \qquad a = 1.$$

Wie ändern sich die Nullstellen von P, wenn der Koeffizient a zu $\tilde{a} = a - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, verfälscht wird? Geben Sie die Kondition des Problems $a\mapsto$ "eine Nullstelle von P" an. Auf wieviele Stellen genau ist die Nullstelle bei einer (relativen) Maschinengenauigkeit von 10^{-16} berechenbar?

4.4. Betrachten Sie das Bestimmen einer Nullstelle des quadratrischen Polynoms $x^2 + 2px - q$ mithilfe der Formel $x = -p + \sqrt{p^2+q}$.

a) Bestimmen Sie die absolute und relative Kondition der Abbildung $(p,q)\mapsto x$. Zeigen Sie: Für $q > 1$ ist das Bestimmen der Nullstelle x gut konditioniert. Für $q\approx -p^2$ ist es schlecht konditioniert.

b) Betrachten Sie folgende zwei Algorithmen zur Berechnung von x:

$$\begin{array}{llllll} \text{Algorithmus 1:} & s := p^2, & t := s+q, & u := \sqrt{t}, & x := -p+u; & \\ \text{Algorithmus 2:} & s := p^2, & t := s+q, & u := \sqrt{t}, & v := p+u, & x := q/v. \end{array}$$

Bestimmen Sie mit einem MATLAB-Programm die Nullstelle mit beiden Algorithmen für $p = 10^5$ und $q = 0.018$. Geben Sie den relativen Fehler beider Auswertungsarten an. Das exakte Ergebnis ist $x = 0.899999999999595000\ldots\cdot 10^{-7}$.

c) Erklären Sie das Verhalten der beiden Algorithmen in Teilaufg. b) mithilfe der Vorwärtsfehleranalyse, d.h. simulieren Sie das Verhalten der Gleitkommaarithmetik für beide Algorithmen. Verwenden Sie hierzu das Modell, daß die Computerrealisierungen (immer mit * gekennzeichnet) der "Elementaroperationen" $+$, $-$, $*$, $/$, $\sqrt{}$ folgendes erfüllen: für Gleitkommazahlen x, y und

$\texttt{op} \in \{+,-,*,/\}$ gilt $x\,\texttt{op}^*y = (x\,\texttt{op}\,y)(1+\delta)$, wobei $\delta = \delta(x,y,\texttt{op})$ die Abschätzung $|\delta| \leq \texttt{eps}$ erfüllt mit $\texttt{eps} = 10^{-16}$. Für $\surd$ gilt: $\sqrt{x}^* = \sqrt{x}(1+\delta)$, wobei $|\delta| \leq \texttt{eps}$. Sie dürfen zudem die Taylorapproximation $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ (für kleine x) einsetzen.

d) Erklären Sie das unterschiedliche Verhalten der beiden Algorithmen aus Teilaufg. b), indem Sie sich überlegen, welcher der beiden Algorithmen einen größeren Stabilitätsindikator hat.

4.5. (**Programmieraufgabe**) Eine Möglichkeit, eine Nullstelle einer Funktion f zu bestimmen ist das Newtonverfahren (welches später in der VO genauer eingeführt wird). Dabei wird, ausgehend von einem Startwert x_0 eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ definiert durch die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1}$$

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm $[\texttt{xn},\texttt{res}] = \texttt{newton}(\texttt{x0},\texttt{nmax},\texttt{f},\texttt{df})$, welches als Ausgabe zwei Vektoren mit den Werten x_n, $n = 1,\ldots,nmax$ und den "Residuuen" $|f(x_n)|$, $n = 1,\ldots,nmax$ zurückgibt. Die Eingabeparameter sind der Startwert x_0, die Länge $nmax$ der Ausgabevektoren sowie *function handles* zu den Funktonen f und f'.

Sei P das Polynom aus Aufg. 3 mit $a = 1$ und Q das Polynom $Q(x) = (x-1)(1+x^2)$. In beiden Fällen ist $x^* = 1$ eine Nullstelle. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `serie4_5`, welches für $nmax = 100$ und $x0 = 2$ für die Funktion P in `figure(1)` und für die Funktion Q in `figure(2)` den tatsächlichen Fehler $|x_n - x^*|$ und das Residuum $|f(x_n)|$ semilogarithmisch gegen den Iterationsindex n plottet (*Hinweis:* `help semilogy`).

Wie stehen in beiden Fällen die Residuen zu den tatsächlichen Fehlern? Wann ist das Residuum ein sinnvolles Maß für den tatsächlichen Fehler?