Serie 5

Abgabe: bis Fr., 30.10.09, 14 Uhr bei Frau Kovalj

5.1. (**schriftlich**) Es soll die Aussage auf der VO über die Rückwärtsstabilität der LU-Zerlegung am Beispiel von Tridiagonalmatrizen bewiesen werden. Machen Sie folgende "Standardannahme" an die Gleitkommaarithmetik: Für zwei Gleitkommazahlen x, y und $\mathtt{op} \in \{+,-,*,/\}$ gibt es ein $\delta = \delta(x,y,\mathtt{op})$ mit $|\delta| \leq \mathtt{eps}$ (= Maschinengenauigkeit), so daß für die Computerrealisierung $\mathtt{op}^*$ von $\mathtt{op}$ gilt:

$$x \mathtt{op}^* y = (x \,\mathtt{op}\, y)(1+\delta). \tag{1}$$

(Dies besagt, daß die Grundrechenarten rückwärtsstabil realisiert werden.) Definiere $\gamma_1 := \frac{\mathtt{eps}}{1-\mathtt{eps}}$ (implizit nehmen wir an, daß $\mathtt{eps} < 1$).

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & & & \\ c_2 & d_2 & e_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & e_{n-1} \\ & & & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Es möge A eine LU-Zerlegung haben.

a) Zeigen Sie: die Faktoren L und U haben die Form

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 & e_1 & & & \\ & u_2 & e_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & e_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie u_1. Geben Sie einen Algorithmus an, der die l_i und die u_i für $i = 2,\ldots,n$ bestimmt.

c) Bei Verwendung von Gleitkommaarithmetik liefert Ihr Algorithmus aus Teilaufg. b) Werte $\widehat{l}_i$ und $\widehat{u}_i$ (anstelle von l_i,u_i). Zeigen Sie unter den Annahmen (1) an die Gleitkommarithmetik, daß

$$|c_i - \widehat{l}_i\widehat{u}_{i-1}| \leq \gamma_1|\widehat{l}_i\widehat{u}_{i-1}|, \qquad |d_i - \widehat{l}_i e_{i-1} - \widehat{u}_i| \leq \gamma_1\left(|\widehat{l}_i e_{i-1}| + |\widehat{u}_i|\right) \qquad \forall\, 2 \leq i \leq n.$$

Schließen Sie auf $|A - \widehat{L}\widehat{U}| \leq \gamma_1 |\widehat{L}|\,|\widehat{U}|$.

5.2. (**Programmieraufgabe**) In der VO wurde folgendes Rückwärtsstabilitätsresultat für die LU-Zerlegung diskutiert: Bestimmt man eine LU-Zerlegung ohne Pivotsuche, so erhält man Faktoren $\widehat{L}$ und $\widehat{U}$, für die es ein ΔA gibt mit $A + \Delta A = \widehat{L}\widehat{U}$ und $\|\Delta A\|_2 \leq \gamma_n \|\,|\widehat{L}|\,|\widehat{U}|\,\|_2$.

Ziel der Aufgabe ist zu sehen, inwieweit diese Abschätzung qualitativ richtig ist. Hierzu wird in MATLAB die LU-Zerlegung (*Hinweis:* `help lu`) in *einfacher Genauigkeit* durchgeführt (*Hinweis:* `help single`, `help eps`, `help cast`). Die Differenz $A - LU$ wird in doppelter Genauigkeit bestimmt, so daß man davon ausgehen kann, den Fehler $A - LU$ "exakt" bestimmt zu haben.

Hierzu seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$A = W + 0.1\,\mathtt{eye}(n), \qquad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \ldots & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2}$$

Schreiben Sie ein MATLABprogramm $[\mathtt{schranke},\mathtt{fehler}] = \mathtt{wilkinson\_example(n)}$, welches eine Fehlerschranke (`schranke`) für die LU-Zerlegung und den tatsächlichen Fehler (`fehler`) zurückgibt. Das

Programm bestimme A, konvertiere A anschließend mittels `single` auf einfache Genauigkeit, bestimme dann die LU-Zerlegung (ebenfalls in einfacher Genauigkeit—dies geschieht in MATLAB automatisch, wenn die Eingabe vom Typ `single` ist) von A. Berechnen Sie die Differenz $A - LU$ in doppelter Genauigkeit, indem Sie A und die erhaltenen Faktoren L und U in "doubles" konvertieren. Die Ausgaben `fehler` $=$ `norm(A − L * U)` und `schranke` $= \gamma_n$`norm`$(|L||U|)$ sind nun einfach zu bestimmen.

Schreiben Sie ein zweites MATLABprogramm `serie5_2`, welches für $n = 1, \ldots, 50$ die Zahlen `schranke` und `fehler` bestimmt und anschließend semilogarithmisch (`help semilogy`) gegen n plottet. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

5.3. In der VO wurde für $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|M\| < 1$ gezeigt: $I+M$ ist regulär und $\|(I+M)^{-1}\| \leq 1/(1-\|M\|)$. Dieses Resultat soll mithilfe der Neumannschen Reihe gezeigt werden, d.h. zeigen Sie, daß $(I + M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-M)^n$. Schließen auf $\|(I + M)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|M\|)$.

5.4. **a)** Sei $LU = PA$ die LU-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenpivotsuche. Offensichtlich ist $\max_{i,j} |L_{ij}| \leq 1$. Zeigen Sie: $\max_{i,j} |U_{ij}| \leq 2^{n-1} \max_{i,j} |A_{ij}|$.

b) Betrachten Sie die Matrix W aus (2). Zeigen Sie, dass bei der LU-Zerlegung ohne Pivotsuche ein Eintrag $\alpha = 2^{n-1}$ entsteht und geben Sie die Matrizen L und U an.

c) Was ändert sich, wenn eine Spaltenpivotsuche durchgeführt wird? Begründen Sie.

5.5. Wir haben Pivotsuche bei LU-Zerlegungen dadurch motiviert, daß die Einträge von L (und U) ggf. groß sein können, obwohl die Einträge von A nicht groß sind. Zeigen Sie, daß dies bei der Cholesky-Zerlegung nicht auftritt, genauer: Es gilt für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ SPD, daß die Einträge des Choleskyfaktors L die Abschätzung $l_{ik}^2 \leq a_{ii}$ für alle i, k erfüllen.

5.6. Sei $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation. Es bezeichne $e_k \in \mathbb{R}^n$ den k-ten Einheitsvektor

a) Zeigen Sie: $P_\pi^{-1} = P_\pi^\top$, wobei P_π die zu π gehörige Permutationsmatrix ist.

b) Sei $L^{(k)} = I - l_k e_k^\top$, wobei $l_k \in \mathbb{R}^n$ nur Einträge in den Zeilen $k + 1, \ldots, n$ hat. Sei π eine Permutation, die die ersten k Einträge unverändert läßt, d.h. $\pi(i) = i$ für $i = 1, \ldots, k$. Zeigen Sie: $\widehat{L}^{(k)} := P_\pi^{-1} L^{(k)} P_\pi$ hat die Form $\widehat{L}^{(k)} = I - \widehat{l}_k e_k^\top$, wobei der Vektor $\widehat{l}_k$ die Einträge $(\widehat{l}_k)_i = (l_k)_{\pi(i)}$ hat.

c) Die LU-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche erzeugt ein $U \in \mathcal{U}_n$ indem in jedem Schritt zuerst ein Zeilentausch und dann ein Eliminationsschritt gemacht wird, d.h. $U = L^{(n-1)} P_{\pi_{n-1}} L^{(n-2)} P_{\pi_{n-2}} \cdots L^{(1)} P_{\pi_1} A$, wobei die Permutationen π_k so sind, daß $\pi_k(i) = i$ für $i = 1, \ldots, k-1$ und die Matrizen $L^{(k)}$ jeweils den Gaußschritt realisieren. Zeigen Sie, daß sich daraus eine Zerlegung $U = \widehat{L}^{(n-1)} \cdots \widehat{L}^{(1)} PA$ ergibt, wobei die Matrizen $\widehat{L}^{(k)} \in \mathcal{L}_n^1$ aus den Matrizen $L^{(k)}$ dadurch entstehen, daß lediglich in der k-ten Spalten die Einträge (in den Zeilen $k + 1, \ldots, n$) permutiert werden; P ist eine Permutationsmatrix.