Serie 6

Abgabe: bis Fr., 6.11.09, 14 Uhr bei Frau Kovalj

6.1. **a)** Formulieren Sie einen Algorithmus, der von einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine RQ-Zerlegung bestimmt, d.h. $A = RQ$ und $Q \in \mathcal{O}_n$ und R ist obere Dreiecksmatrix.

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat *obere Hessenbergform*, wenn $A_{ij} = 0$ für $i > j + 1$. Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der eine Matrix $Q \in \mathcal{O}_n$ erzeugt, so daß $Q^T AQ$ obere Hessenbergform hat. *Hinweis:* Betrachten Sie eine ONB $\{q_1, q_2\}$ von $\operatorname{span}\{e_1, Ae_1\}$ und betrachten Sie Householdermatrizen, die $Qe_1 = q_1$, $Qe_2 = q_2$ leisten.

c) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine *obere Bidiagonalmatrix*, wenn $A_{ij} \neq 0$ lediglich für die Fälle $j = i$ und $j = i + 1$ eintreten kann. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der Matrizen $U, V \in \mathcal{O}_n$ konstruiert, so daß UAV obere Bidiagonalmatrix ist.

6.2. Sei $A = LU$ eine LU-Zerlegung von A und $A = QR$ eine QR-Zerlegung. Zeigen Sie für die Kondition cond_2 bzgl. der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$:

a) $\operatorname{cond}_2(A) = \operatorname{cond}_2(R)$

b) $\operatorname{cond}_2(A) \leq \operatorname{cond}_2(L)\operatorname{cond}_2(U)$

6.3. **a)** Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $Q = \mathrm{Id}_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^\top$ die zugehörige Householder-Reflexion. Zeigen Sie: Q ist symmetrisch ($Q^\top = Q$), Q ist orthogonal ($Q^\top = Q^{-1}$) und Q ist involutorisch ($Q^2 = \mathrm{Id}_n$).

b) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und a nicht parallel zu e_1. Sei $\alpha := \pm\|a\|_2$, $v = a - \alpha e_1$. Rechnen Sie nach, daß bei beiden Wahlen des Vorzeichens bei α für die Householder-Reflexion $Q = \mathrm{Id}_n - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^\top$ gilt: $Qa = \alpha e_1$.

6.4. (**schriftlich**) Householdertransformationen sind Matrizen, die sich von der Identität um eine Rang-1 Matrix unterscheiden. Zeigen Sie folgenden allgemeineren Zusammenhang für invertierbare $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$:

a) Falls $v^\top A^{-1}u \neq -1$, dann gilt

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + v^\top A^{-1}u} A^{-1}uv^\top A^{-1}.$$

b) Falls $v^\top A^{-1}u = -1$, dann ist $A + uv^\top$ nicht invertierbar (*Hinweis:* Finden Sie einen Vektor $z \neq 0$ mit $(A + uv^\top)z = 0$).

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Seien $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ jeweils zwei linear unabhängige Vektoren. Definieren Sie die Gramsche Matrix $G \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$G_{ij} = v_i^\top A^{-1} u_j$$

Zeigen Sie: falls $\mathrm{I} + G$ invertierbar ist, dann hat $A + u_1v_1^\top + u_2v_2^\top$ eine Inverse, welche von der Form

$$(A + u_1v_1^\top + u_2v_2^\top)^{-1} = A^{-1} + \sum_{k,l=1}^{2} b_{kl} A^{-1} u_k v_l^\top A^{-1}$$

für geeignete Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Einträgen b_{kl} ist. Geben Sie B an.

6.5. (**Programmieraufgabe**) Die Matrix $\mathtt{W} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und das LGS $Wx = b$ seien gegeben durch

$$\mathtt{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-2 \\ n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Schreiben Sie eine MATLAB-Routine $x = \texttt{nachiteration}(A, L, U, b, nr)$, die das Lösen des LGS $Ax = b$ mit nr Nachiterationsschritten realisiert, wobei L und U vorhandene (Approximationen an die) Faktoren der LU-Zerlegung von A sind. D.h.: x_0 ist gegeben als Lösung von $LUx_0 = b$ und die Approximation x_{k+1} mit $k+1$ Nachiterationsschritten ergibt sich aus x_k durch $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$, wobei Δx_k die Lösung von $LU\Delta x_k = r_k := b - Ax_k$ ist.

Schreiben Sie ein MATLABprogramm $[err0, err1, err5] = \texttt{serie6}(nmax)$, welches die LGS $Wx = b$ für $n = 1, \ldots, nmax$ mit $nr = 0$, $nr = 1$ und $nr = 5$ löst (*Hinweis:*`help lu`). Die Rückgabevektoren $err0$, $err1$, $err5$ enthalten die Spektralnormen der tatsächlichen Fehler, die die drei verwendeten Lösungsmethoden machen. Das Programm soll ferner die Fehler gegen die Problemgröße n semilogarithmisch (`semilogy`) plotten. Diskutieren Sie die erhaltenen Kurven für $nmax = 100$.

6.6. Zeigen Sie, daß die QR-Zerlegung *mit Pivotsuche* die Diagonaleinträge r_{ii} der (verallgemeinerten) oberen Dreiecksmatrix R dem Betrag nach sortiert, d.h. $|r_{11}| \geq |r_{22}| \geq \cdots$

6.7. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Für eine Matrix C bezeichnet $\sigma(C) \subset \mathbb{C}$ ihr Spektrum, d.h. die Menge der Eigenwerte. Zeigen Sie: $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$.