# Serie 7

Abgabe: bis Fr., 13.11.09, 14 Uhr bei Frau Kovalj

**7.1.** Die Moore-Penrose Pseudoinverse $A^+$ einer Matrix $A$ mit Rang $r$ und Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^H$ ist definiert als $A^+ = \widetilde{V}\widetilde{\Sigma}^{-1}\widetilde{U}^H$, wobei $\widetilde{U}$ und $\widetilde{V}$, Zeigen Sie folgende alternative Darstellung:

$$A^+ = \lim_{\varepsilon \to 0+} A^H(AA^H + \varepsilon\,\mathrm{Id})^{-1}.$$

Warum existiert die im Limes auftretende Inverse?

**7.2.** Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Betrachten Sie die Matrix

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^H & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $\sigma(\widetilde{A})$ die Menge der Eigenwerte von $\widetilde{A}$ und $\sigma_1, \dots, \sigma_{\min\{m,n\}}$ die Singulärwerte von $A$.

**a)** Zeigen Sie: $\sigma(\widetilde{A}) \subset \mathbb{R}$ und $\sigma(\widetilde{A})$ ist symmetrisch bzgl. 0, d.h. $\sigma(\widetilde{A}) = -\sigma(\widetilde{A})$.

**b)** Zeigen Sie: Für $\lambda \in \sigma(\widetilde{A}) \setminus \{0\}$ ist $|\lambda|$ Singulärwert von $A$

**c)** Zeigen Sie: Falls $\lambda > 0$ Singulärwert von $A$ ist, dann ist $\lambda \in \sigma(\widetilde{A})$.

**7.3.** Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnet $\|A\|_F^2 := \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ die *Frobeniusnorm*.

**a)** Zeigen Sie für Matrizen $Q$ mit orthonormalen Spalten, daß gilt: $\|QA\|_F^2 = \|A\|_F^2$ (hier muß natürlich $QA$ gebildet werden können).

**b)** Seien $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{m,n\}}$ die Singulärwerte von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie: $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2$.

**7.4.** **(schriftlich)** Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ mit $\mathrm{rang}(A) = r$ und $A = U\Sigma V^\top$ eine SVD von $A$. Setze $\widetilde{U}_k := U(:, [1:k])$, $\widetilde{V}_k := V(:, [1:k])$, $\Sigma_k := \Sigma([1:k], [1:k])$.

**a)** Zeigen Sie, daß für $k \leq r$ die Matrix $A_k := \widetilde{U}_k\Sigma_k\widetilde{V}_k^\top$ den Rang $k$ hat. *Hinweis:* Zeigen Sie, daß der Span der Spalten von $\widetilde{U}_k$ gleich dem Bild von $A_k$ ist.

**b)** Zeigen Sie, daß für $k < r$ gilt: $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

**c)** Zeigen Sie, daß für $k < r$ die Matrix $A_k$ die *beste* Rang-k-Approximation an $A$ ist, d.h.

$$\min\{\|A - B\|_2 \,|\, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit } \mathrm{rang}(B) = k\} = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

*Hinweis:* überlegen Sie sich, daß es für jedes $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\mathrm{rang}(B) = k$ einen *nichttrivialen* Vektor $z \in \mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ gibt (Hier sind $v_1, \dots, v_{k+1}$ die Spalten von $\widetilde{V}_{k+1}$.) Zeigen Sie dann $\|Az\|_2 \geq \sigma_{k+1}\|z\|_2$ und betrachten Sie $\|(A - B)z\|_2$.

**7.5.** (**Programmieraufgabe**) Schreiben Sie MATLABprogramme `[Q,R] = my_qr(A)`, `y = apply_Q(Q,b)` und `x = solve_with_qr(A,b)`, die folgendes leisten. Die Routine `my_qr` erzeugt eine QR-Zerlegung von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, wobei $R$ eine obere Dreiecksmatrix ist und $Q \in \mathbb{K}^{n\times n-1}$ die $n-1$ Householdervektoren enthält, d.h. setzt man $Q_k := I - 2q_kq_k^H$ mit $q_k := Q(:,k)$, so ist $A = \widetilde{Q}R$ mit $\widetilde{Q} := Q_1 \cdots Q_{n-1}$. Die Funktion `apply_Q(Q,b)` liefert $\widetilde{Q}^H b$, wobei die Matrix $Q \in \mathbb{K}^{n\times n-1}$ das Ergebnis von `my_qr` ist. Schließlich realisiert `solve_with_qr` das Lösen des LGS $Ax = b$ mittels Ihrer QR-Zerlegung. Schreiben Sie zum Testen Ihrer Routinen ein MATLABprogramm `err = serie7(n)`, das folgendes macht: es erzeugt eine zufällige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen zufälligen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Anschließend löst es das LGS $Ax = b$ mittels der obigen Routinen und mittels des MATLABgleichungslösers. Der Rückgabewert `err` ist die Norm der Differenz der beiden erhaltenen Lösungen.

**7.6.** Für lineare "Gesetze" $y = mx + c$ können mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate aus Meßwerten $(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, N$ $(N \geq 2)$ die Parameter $m$, $c$ bestimmt werden.

**a)** definieren Sie die Funktion $R(m,c) := \sum_{i=1}^{N}(y_i - (mx_i + c))^2$. Ihr Minimum ist durch die Bedingungen $\frac{\partial R(m,c)}{\partial m} = 0$ und $\frac{\partial R(m,c)}{\partial c} = 0$ gekennzeichnet. Zeigen Sie, daß diese Bedingungen auf die Normalengleichung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate führt.

**b)** Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist auch für manche nichtlinearen Gesetze einsetzbar. Überlegen Sie sich, wie Sie aus Meßdaten $(t_i, y_i)$, $i = 1, \dots, N$ die Parameter $k$, $C$ aus dem Gesetz $y(t) = Ce^{-kt}$ bestimmen können. Wie können Sie bei einem Gesetz $y(t) = Ct^{\alpha}$ vorgehen, um $C$ und $\alpha$ zu bestimmen?

**c)** Schreiben Sie ein MATLABprogramm `serie7_7(nmin,nmax)`, welches Für $N = 2^n$, $n = nmin, \dots, nmax$, zufällige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ erzeugt und ihre QR-Zerlegung mittels Ihrer Routine `my_qr` bestimmt. Bestimmen Sie die benötigte Zeit $t(N)$ (mittels `tic`, `toc` oder `cputime`). Plotten Sie doppelt logarithmisch (`help loglog`) die benötigte Zeit gegen die Problemgröße $N$. Für große $N$ sollte $t(N) \approx CN^{\alpha}$ sein. Bestimmen Sie $\alpha$ mittels der in Teilaufg. b) entwickelten Methode und der MATLAB-Funktion `polyfit`. Verwenden Sie $nmin = 6$, $nmax = 11$.

**7.7.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch* mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie folgende Charakterisierung des $k$-ten Eigenwertes:

$$\lambda_k = \min_{\substack{S\subset\mathbb{R}^n \\ \dim S = n-k+1}} \max_{0\neq x\in S} \frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2}.$$

*Hinweis:* Seien $v_k$, $k = 1, \dots, n$ die zugeh. Eigenvektoren. Betrachten Sie die Räume $S_k := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ und $S_k' := \operatorname{span}\{v_k, \dots, v_n\}$. Überlegen Sie sich weiterhin, warum Sie für jedes $S$ mit $\dim S = n - k + 1$ ein $x \in S \cap S_k$ finden können.

**7.8.** Für $i \neq j$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ ist die Givens-Rotation $G(i,j,\theta)$ gegeben als

$$G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& c &&& s && \\ &&&& 1 &&&& \\ &&&&& \ddots &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&& -s &&& c && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& \ddots \end{pmatrix}$$

Hier ist $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ und die Einträge $c$ und $s$ sind in den Zeilen/Spalten $i$ und $j$.

**a)** Zeigen Sie: $G(i,j,\theta)$ ist eine orthogonale Matrix. Geometrische Interpretation?

**b)** Zeigen Sie: die Matrix $GA$ unterscheidet sich von $A$ lediglich in den Zeilen $i$ und $j$. Die Zeilen $i$ und $j$ von $GA$ ergeben sich als Linearkombination der Zeilen $i$ und $j$ von $A$

**c)** Zeigen Sie: Man kann zu gebenem $A$ ein $\theta$ finden, so daß die Givensrotation $G(1,2,\theta)$ die Bedingung $(GA)_{2,1} = 0$ erfüllt.

**d)** Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der eine QR-Zerlegung einer Matrix $A$ mittels Givensrotationen bestimmt.