Serie 8

Abgabe: bis Fr., 20.11.09, 14 Uhr bei Frau Kovalj

8.1. (**schriftlich**) Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Knoten. Für jeden Knoten x_i sei $m_i \in \mathbb{N}_0$ gewählt. Setze $N := \sum_{i=0}^n (m_i + 1)$ und $m := \max_i m_i$. Die Hermitesche Interpolationsaufgabe lautet: Finde $p \in \mathcal{P}_{N-1}$, so daß $f^{(j)}(x_i) = p^{(j)}(x_i)$ für $j = 0, \ldots, m_i$ und $i = 0, \ldots, n$.

a) Zeigen Sie: Für $f \in C^m(\mathbb{R})$ ist die Hermitesche Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar.

b) Sei der (notationellen) Einfachheit halber $m_i = m$ für alle i. Sei $f \in C^N(\mathbb{R})$. Zeigen Sie die folgende Fehlerdarstellung: Für jedes $\overline{x} \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$f(\overline{x}) - p(\overline{x}) = \Omega_N(\overline{x}) \frac{1}{N!} f^{(N)}(\xi), \qquad \Omega_N(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^{m+1}.$$

8.2. In der Vorlesung wurden die Tschebyscheffpolynome T_n für $x \in [-1, 1]$ durch $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ definiert. Zeigen Sie, daß für diese Polynome für $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ gilt:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left((x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n \right).$$

Hinweis: 3-Term-Rekursion.

8.3. **a)** Gegeben sei die Funktion $x \mapsto f(x) = e^{\lambda x}$ auf dem Intervall $[a, b]$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_i^{(n)} \in [a, b]$, $i = 0, \ldots, n$ paarweise verschieden und $p_n \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom von f zu den Knoten $x_i^{(n)}$, $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_{C([a,b])} = 0$.

b) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = 0$ und $f(x) = x \sin(\pi/x)$ für $x > 0$. Geben Sie das Interpolationspolynom an, welches f in den Punkten $x_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$ interpoliert. Konvergiert die Folge der Interpolationspolynome gegen f in $C([0, 1])$

8.4. Sei $n = 2m$ eine gerade Zahl. Die Funktion $x \mapsto f(x) = e^{2x}$ soll auf dem Intervall $I = [0, 2]$ in äquidistanten Punkten $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n = 2m$ mit $h = 2/n$ auf zwei Arten interpoliert werden: $p_n \in \mathcal{P}_n$ ist das Interpolationspolynom (welches die Punkte $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$ interpoliert) und s_n ist eine stückweise quadratische Funktion definiert durch $s_n|_{[x_{2k}, x_{2k+2}]} \in \mathcal{P}_2$, $k = 0, \ldots, m - 1$ und den Interpolationsbedingungen $s_n(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n = 2m$. Geben Sie eine (sinnvolle) obere Schranke für $\|f - p_n\|_{C([0,2])}$ und $\|f - s_n\|_{C([0,2])}$ an. Wie muß man in beiden Fällen n wählen, damit dieser Fehler $\leq 10^{-4}$ wird?

8.5. Seien $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots x_n \leq 1$ Knoten. $I_n : C([-1, 1]) \to \mathcal{P}_n$ bezeichnet den Interpolationsoperator in den Knoten und Λ_n die zugehörige Lebesguekonstante. Zeigen Sie folgende Aussagen:

$$\|I_n f\|_{C([-1,1])} \leq \Lambda_n \|f\|_{C([-1,1])} \qquad \forall f \in C([-1, 1]) \tag{1}$$

$$\exists f \in C([-1, 1]) \text{ sodass } \|I_n f\|_{C([-1,1])} = \Lambda_n \|f\|_{C([-1,1])} \tag{2}$$

$$I_n v = v \qquad \forall v \in \mathcal{P}_n \tag{3}$$

8.6. Seien ξ_i, $i = 0, \ldots, n$ paarweise verschiedene Knoten in $[-1, 1]$. Sei $\psi : [-1, 1] \to [a, b]$ die affine Bijektion und $x_i := \psi(\xi_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Mit $\Lambda_n^{[-1,1]}$ und $\Lambda_n^{[a,b]}$ bezeichnen wir die Lebesguekonstanten für die Knoten $(\xi_i)_{i=0}^n$ bzw. $(x_i)_{i=0}^n$ bzgl. der Intervalle $[-1, 1]$ und $[a, b]$.

a) Zeigen Sie: $\Lambda_n^{[a,b]} = \Lambda_n^{[-1,1]}$.

b) Zeigen Sie: Für $f \in C^{n+1}([a, b])$ gilt für den Interpolanten $I_n^{[a,b]} f$, der f in den Knoten $(x_i)_{i=0}^n$ interpoliert

$$\|f - I_n^{[a,b]} f\|_{C([a,b])} \leq (1 + \Lambda_n) \frac{1}{(n + 1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{C([a,b])}, \qquad h = b - a.$$

8.7. Seien $x_i \in [a, b]$,$i = 0, \dots, n$ paarweise verschiedene Knoten und Λ_n die zugehörige Lebesguekonstante. Setze $f_i := f(x_i)$. Sei $p \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom, das die Werte (x_i, f_i), $i = 0, \dots, n$ interpoliert. Seien die Zahlen $\widetilde{f}_i$ Approximationen an die Werte f_i. Sei $\widetilde{p} \in \mathcal{P}_n$ das Polynom, daß die Werte $(x_i, \widetilde{f}_i)$, $i = 0, \dots, n$, interpoliert. Geben Sie eine Abschätzung für $\|p - \widetilde{p}\|_{C([a,b])}$ an.

8.8. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t)\, dt$ wird an den äquidistanten Punkten $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n$, tabelliert, wobei $h = 1/n$. Sei s_1 die stückweise lineare Interpolation, d.h. $s_1|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathcal{P}_1$ (für $i = 0, \dots, n-1$) und $s_1(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \dots, n$. Zeigen Sie $\|f - s_1\|_{C([0,1])} \leq \frac{1}{8}h^2$. Seien nun die Zahlen $\widetilde{f}_i$ Approximationen an die Werte $f(x_i)$ und entsprechend $\widetilde{s}_1$ die stückweise lineare Interpolation durch die Knoten $(x_i, \widetilde{f}_i)$, $i = 0, \dots, n$. Wie genau müssen die Approximationen $\widetilde{f}_i$ sein, damit $\|f - \widetilde{s}_1\|_{C([0,1])} \leq \frac{1}{4}h^2$ ist?