106.064 Numerische Mathematik

Übung 2

Aufgabe 1 (schriftlich). Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Skyline-Matrix*, falls es Zahlen p_i, $q_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, n$ gibt, so dass für die i-te Zeile von A gilt: $A_{ij} = 0$ für $j < i - p_i$ und für die j-te Spalte von gilt: $A_{ij} = 0$ für $i < j - q_j$. Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix mit existierender LU-Zerlegung. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Faktoren L und U die Skyline–Struktur *erben*, d.h. $L_{ij} = 0$ für $j < i - p_i$ und $U_{ij} = 0$ für $i < j - q_j$. Folgendes Beispiel illustriert die Aussage:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & 2 & 2 \\ & & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 18 \\ & 4 & 5 & 29 & 48 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \\ & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & 2 & 2 \\ & & 1 & 3 & 3 \\ & & & 1 & 4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = p_5 = 3$, $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, $p_4 = 2, q_5 = 5$.

Aufgabe 2 (schriftlich). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine SPD-Matrix. Dann existiert eine eindeutige reguläre untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Cholesky-Faktor), mit $A = LL^T$ und $\ell_{kk} > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$. *Anleitung:* Verwenden Sie vollständige Induktion und einen ähnlichen Ansatz wie im Beweis der LU-Zerlegung.

Aufgabe 3. Für die Konditionszahl des Cholesky-Faktors aus Aufgabe 2 gilt:

$$\mathrm{cond}_2(L) = \mathrm{cond}_2(L^T) = \sqrt{\mathrm{cond}_2(A)}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^T B)}$ für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie Aufgabe 4 aus Übung 1.

Aufgabe 4. Zeigen Sie folgende Äquivalenz: A ist SPD $\Leftrightarrow$ Algorithmus 3.13 "läuft durch" (d.h. es wird nicht durch Null dividiert oder die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen).