106.064 Numerische Mathematik

Übung 3

Aufgabe 1 (schriftlich). Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$A_\varepsilon \, x_i = b_i$$

mit der Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0$$

und den rechten Seiten

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösungen x_1 und x_2 mit dem Gauss-Verfahren. Welcher Effekt zeigt sich für $\varepsilon \to 0$? Berechnen Sie $cond_\infty(A_\varepsilon)$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2 (schriftlich). Für $i \neq j$ und $\theta \in [0.2\pi)$ is die Givens-Rotation $G(i, j, \theta)$ gegeben als

$$G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & c & & & & s & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & -s & & & & c & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $c = \cos\theta, s = \sin\theta$ und die Einträge c und s sind in den Zeilen/Spalten i und j.

(i) Zeigen Sie: $G(i, j, \theta)$ ist eine orthogonale Matrix. Geometrische Interpretation?

(ii) Zeigen Sie: Die Matrix GA unterscheidet sich von A lediglich in den Zeilen i und j. Die Zeilen i und j von GA ergeben sich als Linearkombination der Zeilen i und j von A.

(iii) Zeigen Sie: Man kann zu gegebenem A ein θ finden, so dass die Givens-Rotation $G(1, 2, \theta)$ die Bedingung $(GA)_{2,1} = 0$ erfüllt.

(iv) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der eine QR-Zerlegung einer Matrix A mittels Givens-Rotationen bestimmt.

Aufgabe 3. Für zwei reelle Funktionen f und g schreiben wir $f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ für $x \to a$, falls es positive Zahlen M und δ gibt, so dass

$$|f(x)| \le M\,|g(x)|, \quad |x-a| < \delta.$$

Wir betrachten in dieser Aufgabe verschiedene Näherungen zur numerischen Berechnung von Integralen (Quadratur) und deren Fehler.

(i) Es sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Für $I = [a,b]$ und $N \in \mathbb{N}$ sei $h := (b-a)/N$. Wir setzen $x_i = a + ih, i = 0, \dots, N$ und definieren die *Rechtecksregel*

$$R(h) := \sum_{i=0}^{N-1} h f(x_i)$$

als Approximation an $\int_a^b f(x)\,dx$. Zeigen Sie, dass für den Fehler $|\int_a^b f(x)\,dx - R(h)| = \mathcal{O}(h)$ gilt. Geben Sie hierzu eine Zahl $C > 0$ an, für die Sie

$$|\int_a^b f(x)\,dx - R(h)| \le C\,h \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

zeigen können. *Hinweis:* Betrachten Sie die Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ und verwenden Sie Taylor.

(ii) Führen Sie die gleiche Analyse für die *Trapezregel*

$$T(h) := \sum_{i=0}^{N-1} I_i, \quad I_i := \frac{h}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

durch. Von welcher Ordnung ist der Fehler? Welche Vorraussetzungen müssen Sie an die Funktion f stellen?

Aufgabe 4. Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung:
Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und $b \in \mathbb{K}^n$, so ist das Gauss-Verfahren genau dann durchführbar, wenn die Matrix A eine LU-Zerlegung besitzt.