106.064 Numerische Mathematik

Übung 4

Im Folgenden wollen wir die Optimalität der Singulärwertzerlegung bezüglich der Frobenius- und der ℓ^2-Operatornorm beweisen. Wir wissen bereits, dass für jede Matrix $M \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit Singulärwerten σ_j die folgenden Identitäten gelten:

$$\|M\|_2 = \sigma_1 \quad \text{und} \quad \|M\|_F = \left(\sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_j^2\right)^{1/2}.$$

Sei nun $M \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit Singulärwertzerlegung $M = U\Sigma V^H$ und Singulärwerten σ_j. Sei ferner $p \in \mathbb{N}$ mit $p \leq \min\{m,n\}$. Wir schreiben die orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ in der Form $U = (U_0, U_1)$ und $V = (V_0, V_1)$ mit $U_0 \in \mathbb{K}^{m\times p}$ und $V_0 \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Ausserdem definieren wir $S_p := \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{K}^{p\times p}$ und betrachten die Matrix:

$$\mathcal{T}_p M := U_0 S_p V_0^H \in \mathbb{K}_p^{m\times n} := \{M \in \mathbb{K}^{m\times n} \mid \operatorname{Rang}(M) \leq p\}.$$

Aufgabe 1 (schriftlich). Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_p M$ die Bestapproximation von M bezüglich der ℓ^2-Norm im Raum der Rang-p Matrizen ist, d.h.

$$\|M - \mathcal{T}_p M\|_2 = \min_{M_p \in \mathbb{K}_p^{m\times n}} \|M - M_p\|_2 = \sigma_{p+1}.$$

Gehen Sie hierbei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass das Minimum durch $\mathcal{T}_p M$ tatsächlich angenommen wird, d.h. $\|M - \mathcal{T}_p M\|_2 = \sigma_{p+1}$.

(ii) Sei $M_p \in \mathbb{K}_p^{m\times n}$ beliebig. Zeigen Sie, dass es orthonormale Vektoren $z_{p+1}, \dots, z_{\operatorname{Rang}(M)} \in \mathbb{K}^n$ mit

$$z_j \in \ker(M_p) \cap \{v_1, \dots, v_j\} =: V_j, \quad \forall j = p+1, \dots, \operatorname{Rang}(M)$$

gibt, wobei $v_j \in \mathbb{K}^n$ die Spalten von V bezeichnet.

(iii) Zeigen Sie nun $\|M - M_p\|_2 \geq \sigma_{p+1}$ indem Sie die soeben konstruierten Vektoren z_i geschickt verwenden.

Aufgabe 2 (schriftlich). Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_p M$ die Bestapproximation von M bezüglich der Frobeniusnorm im Raum der Rang-p Matrizen ist, d.h.

$$\|M - \mathcal{T}_p M\|_F = \min_{M_p \in \mathbb{K}_p^{m\times n}} \|M - M_p\|_F = \left(\sum_{j=p+1}^{\operatorname{Rang}(M)}\right)^{1/2}.$$

Hinweis: Gehen Sie analog zu Aufgabe 1 vor und verwenden Sie zusätzlich die Invarianz der Frobeniusnorm unter Orthogonaltransformationen, d.h. $\|M - M_p\|_F^2 = \|(M - M_p)Q\|_F^2$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Aufgabe 3. Zu einem Teilraum V von $\mathbb{K}^n$ bezeichnet $V^\perp := \{x \in \mathbb{K}^n \;:\; \forall y \in V x \cdot y = 0\}$ das **orthogonale Komplement**. $V^\perp$ ist ein Teilraum von $\mathbb{K}^n$, und es gilt $\mathbb{K}^n = V \oplus V^\perp$. Insbesondere existiert eine eindeutige lineare Abbildung $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $P|_V = I$ und Kern $P = V^\perp$, bezeichnet als **Orthogonalprojektion** auf V. Sei nun A^+ die **Pseudo-Inverse** von A. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

(i) A^+A ist die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Kern}(A)^\perp \subseteq \mathbb{K}^n$.

(ii) AA^+ ist die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Bild}(A) \subseteq \mathbb{K}^m$.

Aufgabe 4. Für lineare "Gesetze" $y = mx+c$ können mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate aus Messwerten $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, N (N \geq 2)$ die Parameter m und c bestimmt werden.

(i) Definieren Sie die Funktion $R(m,c) := \sum_{i=1}^N \big(y_i - (mx_i + c)\big)^2$. Ihr Minimum ist durch die Bedingungen $\frac{\partial R(m,c)}{\partial m} = 0$ und $\frac{\partial R(m,c)}{\partial c} = 0$ gekennzeichnet. Zeigen Sie, dass diese Bedingungen auf die Normalengleichung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate führt.

(ii) Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist auch für manche nichtlineare Gesetze einsetzbar. Überlegen Sie sich, wie Sie aus den Messdaten $(t_i, y_i), i = 1, \ldots, N$ die Parameter k, C aus dem Gesetz $y(t) = Ce^{-kt}$ bestimmen können. Wie können Sie bei einem Gesetz $y(t) = Ct^\alpha$ vorgehen, um C und α zu bestimmen?