106.064 Numerische Mathematik

Übung 5

Aufgabe 1. (schriftlich) Zeigen Sie Satz 4.16 aus dem Skript: Gegeben seien paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ und zugehörige Funktionswerte $y_j^{(k)} \in \mathbb{K}$ für $0 \le j \le n$ und $0 \le k \le n_j$. Definiere

$$N := \left[\sum_{j=0}^{n}(n_j + 1)\right] - 1.$$

Dann existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \mathbb{P}_N$ mit

$$p^{(k)}(x_j) = y_j^{(k)} \text{ für } 0 \le j \le n \text{ und } 0 \le k \le n_j.$$

Aufgabe 2. (schriftlich) Zeigen Sie Satz 4.17 aus dem Skript: Unter den Vorraussetzungen von Aufgabe 1 sei $p \in \mathbb{P}_N$ das Hermite-Interpolationspolynom für $y_j^{(k)} = f^{(k)}(x_j)$, wobei $f \in \mathcal{C}^{N+1}([a,b])$. Ist $x \in [a,b]$ und $I \subset [a,b]$ ein Intervall mit $x_0, \dots, x_n, x \in I$, so existiert ein $\xi \in I$, sodass für den Interpolationsfehler in x gilt

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)(\xi)}}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)^{n_j+1}.$$

Aufgabe 3.

(i) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Schreiben Sie eine `Matlab`-Funktion `runge[n]` welches das Interpolationspolynom vom Grad `n` berechnet. Die Stützstellen seien dabei äquidistant in $I := [-5, 5]$ gewählt. Das Polynom und die Funktion f sollen auf I geplottet werden. Was beobachten Sie für steigendes `n`? Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Zusammenhang mit Korollar 4.5 aus dem Skript.

(ii) Die Chebyshev-Knoten $x_{j,n}$ für $j \in \{0, \dots, n\}$ sind definiert als

$$x_{j,n} := 5 \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right).$$

Wiederholen Sie Aufgabe (i) mit diesen Stützstellen. Was beobachten Sie.

Aufgabe 4. Das Neville-Verfahren lässt sich auf Hermite Interpolation erweitern. Sei $p \in \mathbb{P}_N$ das eindeutige Polynom mit

$$p^{(j)}(x_\ell) = f^{(j)}(x_\ell) \quad \text{für } \ell = 0, \dots, n,\ 0 \le j \le n_\ell.$$

Hier sind $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ die Stützstellen und $n_\ell \in \{0, 1\}$ die Anzahl der geforderten Ableitungen (es gilt $(\sum_{\ell=0}^{n} n_\ell + 1) - 1 = N$). Wir führen sogenannte virtuelle Stützstellen $t_0 \le \dots \le t_N$ ein. Für alle $\ell \in \{0, \dots, n\}$ existiert ein eindeutiges $i = i(\ell) \in \{0, \dots, N\}$ mit $x_\ell = t_i$ im Fall $n_\ell = 0$ und $t_i = t_{i+1} = x_\ell$ im Fall $n_\ell = 1$. Wir definieren durch Induktion für $k \ge 1$

- falls $t_i = t_{i+1} = x_\ell$

$$p_{i,i+1}(x) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x - x_\ell),$$

- falls $t_i \ne t_{i+k}$

$$p_{i,i+1,\dots,i+k}(x) = \frac{(x - t_i)p_{i+1,\dots,i+k}(x) - (x - t_{i+k})p_{i,\dots,i+k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i},$$

wobei $p = p_{1,\dots,N}$ und $p_{i,i} = f(t_i)$ für $i \in \{0, \dots, n\}$. Beweisen Sie durch Induktion die Korrektheit dieser Formeln, d.h. die Polynome $p_{i,\dots,i+k} \in \mathbb{P}_{k+1}$ erfüllen:

- $p_{i,\dots,i+k}(x_\ell) = f(x_\ell)$ für $\exists j \in \{i, \dots, i+k\}$ s.d. $x_\ell = t_j$.
- $p'_{i,\dots,i+k}(x_\ell) = f'(x_\ell)$ für $\exists j \in \{i, \dots, i+k-1\}$ s.d. $x_\ell = t_j = t_{j+1}$.