106.064 Numerische Mathematik

Übung 6

Aufgabe 1. (schriftlich) Es gilt der *Alternantensatz von Chebyshev:*
Ein Polynom $p^\star \in \mathbb{P}_n$ ist genau dann Bestapproximierende in $\mathbb{P}_n$ von $f \in \mathcal{C}([a,b])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, wenn die Alternanteneigenschaft gilt, d.h. wenn $\{\xi_0, \dots, \xi_{n+1}\} \subset [a,b]$ existiert, $\xi_0 < \dots < \xi_{n+1}$, mit

$$p^\star(\xi_{j+1}) - f(\xi_{j+1}) = -(p^\star(\xi_j) - f(\xi_j)), \quad j = 0, \dots, n,$$

und

$$|p^\star(\xi_j) - f(\xi_j)| = \|p^\star - f\|_\infty, \quad j = 0, \dots, n+1.$$

Die Knotenmenge $\{\xi_0, \dots, \xi_{n+1}\}$ bezeichnet man als Alternante zu f und $p^\star$.

(i) Finden Sie ein Beispiel um zu zeigen, dass die Alternante nicht eindeutig sein muss.

(ii) Nutzen Sie den Alternantensatz um zu beweisen, das jedes $f \in \mathcal{C}([a,b])$ eine eindeutige Bestapproximierende aus $\mathbb{P}_n$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ hat.

Aufgabe 2. (schriftlich) Die *Bernsteinpolynome* $b_{i,n}$ sind definiert durch

$$b_{i,n}(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Sei $B_n : C([0,1]) \to \mathbb{P}_n$ definiert durch $B_n(f) = \sum_{i=0}^n f(\frac{i}{n}) b_{i,n}$. Zeigen Sie:

(i) Seien Monome $m_i \in \mathbb{P}_i$ gegeben durch $m_i(x) := x^i$. Dann gilt $B_n(m_0) = m_0$ und $B_n(m_1) = m_1$ für $n \geq 1$ und $(B_n(m_2))(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$ für $n \geq 2$.

(ii) Für jedes $\delta > 0$, $\overline{x} \in [0,1]$, $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{\substack{i \in \{0,\dots,n\} \\ |i/n - \overline{x}| \geq \delta}} b_{i,n}(\overline{x}) \leq \frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{\delta^2 n}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $B_n(f)$ für ein geeignetes $f \in \mathbb{P}_2$.

(iii) *Approximationssatz von Weierstrass:* Zeigen Sie, das für jedes $f \in C([0,1])$ die Folge $f_n := B_n(f) \in \mathbb{P}_n$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie folgende *min-max* Eigenschaft des k–ten Eigenwertes:

$$\lambda_k = \min_{\substack{S \subset \mathbb{R}^n \\ \dim S = n-k+1}} \max_{0 \neq x \in S} \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}.$$

Hinweis: Seien v_k, $k = 1, \dots, n$ die zugehörigen Eigenvektoren. Betrachten Sie die Räume $S_k := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ und $S_k' := \operatorname{span}\{v_k, \dots, v_n\}$. Zeigen Sie weiters, dass gilt $S \cap S_k \neq \emptyset$ für alle $S \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dim S = n-k+1$.

Aufgabe 4. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Cosinusfunktion auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(i) Gegeben seien drei äquidistante Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Berechnen Sie das quadratische Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_2$ und leiten Sie eine möglichst gute Abschätzung für den maximalen Fehler $\|f - p\|_\infty$ ab.

(ii) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \dots x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben. Das zugehörige Interpolationspolynom für die Werte der Cosinusfunktion bezeichnen wir mit $p_n \in \mathbb{P}_n$. Zeigen Sie, dass $\{p_n\}$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ gleichmässig gegen cos konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} \|cos - p_n\|_\infty = 0$. Das ist im Allgemeinen nicht so, wie das Beispiel von Runge belegt.