**106.064 Numerische Mathematik**

# Übung 7

**Aufgabe 1 (schriftlich).** Sei $f \in \mathcal{C}^4[a,b]$ und $S_\Delta$ eine kubische Splinefunktion auf

$$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

mit $S_\Delta(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. Für Funktionen $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|$ die Halbnorm

$$\|f\|^2 := \int_a^b |f''(x)|^2 dx.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|f - S_\Delta\|^2 = \int_a^b \big(f(x) - S_\Delta(x)\big) f^{(4)}(x)\, dx,$$

falls zusätzlich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $f'(x) = S'_\Delta(x)$ für $x = a, b$.

(ii) $f''(x) = S''_\Delta(x)$ für $x = a, b$.

(iii) $S_\Delta$ ist periodisch und $f \in \mathcal{C}^4_p[a,b]$, wobei $\mathcal{C}^4_p[a,b]$ den Raum der $\mathcal{C}^4[a,b]$ Funktionen bezeichnet, die bis zur dritten Ableitung periodisch sind.

**Aufgabe 2 (schriftlich).** Wir betrachen erneut das Beispiel von Runge (vgl. Übung 5)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ auf } [-5, 5].$$

Schreiben Sie ein MATLAB Programm welches die lineare und kubische Spline (natürliche Randbedingungen) Interpolierende zu äquidistanten Stützstellen bestimmt. Verdoppeln Sie die Anzahl der Stützpunkte in jedem Schritt und plotten Sie ihr Ergebnis. Was beobachten Sie?

**Aufgabe 3.** Gegeben seien die vier Punkte $(0,-3), (1,1), (2,2)$ und $(4,7)$ Konstruieren Sie

(i) den linearen Spline $s^1 \in \mathcal{C}[0,4]$.

(ii) den kubischen Spline $s^3 \in \mathcal{C}^2[0,4]$ mit natürlichen Randbedingungen.

**Aufgabe 4.** Zu einer gegebenen Funktion $f \in \mathcal{C}[a,b]$ und einer Zerlegung

$$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

sei $s_f$ die stückweise linear Interpolierende, d.h. $s_f(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

(i) Zeigen Sie die Minimaleigenschaft:

$$\|s'_f\|_{L^2[a,b]} \le \|g'\|_{L^2[a,b]}$$

für alle $g \in \mathcal{C}^1[a,b]$ mit $g(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n$.

(ii) Folgern Sie daraus die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{h_i} \big(g(x_{i+1}) - g(x_i)\big)^2 \le \|g'\|^2_{L^2[a,b]}.$$