Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 7.10.2014 23. September 2014

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 1

Aufgabe 1:
Für eine Folge $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ aus $[0,1]$ gelte $|\frac{1}{2}-x_{t+1}| \leq |\frac{1}{2}-x_t|^p$ für $t \geq 2$ mit $p > 1$. Wie groß muss t sein, damit $|\frac{1}{2}-x_t|$ im double precision standard 0 ist?

Aufgabe 2:
a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und es gelte $f \in \mathcal{O}(h^p)$ und $g \in \mathcal{O}(h^q)$ für $h \to 0$ und $p, q \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $(f+g) \in \mathcal{O}(h^{\min(p,q)})$ für $h \to 0$ und

(b) $(f \cdot g) \in \mathcal{O}(h^{p+q})$ für $h \to 0$.

(c) $(f \circ g) \in \mathcal{O}(h^{pq})$ für $h \to 0$.

b) Zur numerischen Berechnung von Ableitungen verwendet man häufig die Differenzenquotienten

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \tag{1a}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}. \tag{1b}$$

Beweisen Sie, dass für hinreichend glatte Funktionen f für $h \to 0$ gilt

$$f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \mathcal{O}(h^2), \quad f''(x) - \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \mathcal{O}(h^2).$$

Aufgabe 3:
Eine Matrix-Matrix Multiplikation erfordert relativ viele Rechenoperationen. Der vom Mathematiker Volker Strassen 1969 publizierte Strassen-Algorithmus reduziert die Anzahl der Rechenoperationen. Der Einfachheit halber sei $A, B \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$ und das Produkt $C = AB$ sei zu berechnen. Dafür werden die Matrizen in vier Blöcke der Größe 2^{m-1} zerlegt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7, \tag{2a}$$

$$C_{12} = M_3 + M_5, \tag{2b}$$

$$C_{21} = M_2 + M_4, \tag{2c}$$

$$C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6. \tag{2d}$$

mit

$$
\begin{aligned}
M_1 &:= (A_{11}+A_{22})\,(B_{11}+B_{22})\,, && \text{(3a)}\\
M_2 &:= (A_{21}+A_{22})\,B_{11}, && \text{(3b)}\\
M_3 &:= A_{11}\,(B_{12}-B_{22})\,, && \text{(3c)}\\
M_4 &:= A_{22}\,(B_{21}-B_{11})\,, && \text{(3d)}\\
M_5 &:= (A_{11}+A_{12})\,B_{22}, && \text{(3e)}\\
M_6 &:= (A_{21}-A_{11})\,(B_{11}+B_{12})\,, && \text{(3f)}\\
M_7 &:= (A_{12}-A_{22})\,(B_{21}+B_{22})\,. && \text{(3g)}
\end{aligned}
$$

Im Strassen-Algorithmus werden die Multiplikationen in (3) wiederum (rekursiv) mit der obigen Darstellung berechnet.

a) Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ermitteln Sie die Anzahl von Multiplikationen und Additionen zur Berechnung des Matrixproduktes AB nach Definition, d.h. ohne Verwendung des Strassen-Algorithmus.

b) Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $n = 2^m$. Berechnen Sie die Anzahl der Multiplikationen des Strassen-Algorithmus zur Berechnung von AB.

Aufgabe 4:
Zur Berechnung der Euler'schen Zahl e könnte man so vorgehen, dass man den Grenzwert

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{4}$$

bzw.

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \tag{5}$$

approximiert, indem man n geeignet wählt.

a) Wieviele Rechenoperationen benötigen Sie in Abhängigkeit von n zur Approximation von e bei beiden Varianten.

b) Schätzen Sie für beide Varianten den Approximationsfehler $\Delta_{\text{app}}(n) := e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bzw. $\Delta_{\text{app}}(n) := e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ in Abhängigkeit von n ab.

Hinweis: Verwenden Sie für die erste Variante den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für eine geeignete Funktion f auf dem Intervall $[0, 1/n]$.

Aufgabe 5:
Untersuchen Sie, ob folgende Funktionsauswertungen gut konditioniert sind und geben Sie die relativen Konditionszahlen an.

a) $f(x) = \frac{1}{1+3x} - \frac{1-2x}{1+x}$ für $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

b) $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ für $x > 0$

c) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$