Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 21.10.2014 14. Oktober 2014

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 3

Aufgabe 11:
a) Berechnen Sie die Interpolationspolynome $p \in \Pi_1$ (bzw. $p \in \Pi_2$) an die Funktion $f(x) = \sin(x)$ zu den Stützstellen $0, \pi/2$ (bzw. $-\pi/2, 0, \pi/2$) und den Stützwerten $y_j = f(x_j)$. Erklären Sie die Ergebnisse.

b) Approximieren Sie $\sqrt{2}$ durch $p(1/2)$, wobei $p \in \Pi_3$ das Interpolationspolynom zu

$$p(x) = 2^x, \qquad x = -1, 0, 1, 2$$

ist. Verwenden Sie dazu das Aitken-Neville Schema. Geben Sie eine Schranke für den Approximationsfehler mit Hilfe von Satz 3.15 an.

Aufgabe 12:
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und $p \in \Pi_2$ das interpolierende Polynom mit

$$p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p(2) = f(2).$$

a) Berechnen Sie $p'(0)$.

b) Zeigen Sie folgende Fehlerabschätzung:

$$|p'(0) - f'(0)| \leq \frac{1}{3} \|f^{(3)}\|_\infty.$$

Aufgabe 13:
a) Zeigen Sie mit Hilfe von Lemma 3.19, dass für die Chebyshev-Polynome $T_n \in \Pi_n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_j(x)\, T_k(x)\, dx = 0, \qquad j \neq k.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $p \in \Pi_{n-1}$ existiert, so dass gilt

$$\max_{x \in [-1,1]} |x^n - p(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Mit anderen Worten für großes n wird $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ auf dem Intervall $[-1,1]$ fast linear abhängig.

Aufgabe 14:
Lösen Sie mit dem Verfahren der Dividierten Differenzen die Hermite Interpolationsaufgabe: Gesucht ist $p \in \Pi_5$ mit

$$p(-2) = \frac{1}{3}, \quad p(-1) = \frac{1}{2}, \quad p'(-1) = \frac{1}{4}, \quad p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p''(0) = 2.$$

Aufgabe 15:
Sei $f(x) = \exp(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Stützstellen aus

dem Intervall $[a,b]$. Zeigen Sie, dass für die interpolierenden Polynome $p_n \in \Pi_n$ mit $p_n(x_j) = f(x_j)$ für $j = 0, \dots, n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f(x)| = 0.$$