Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 28.10.2014 21. Oktober 2014

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 4

Aufgabe 16:
Zeigen Sie, dass die Matrix aus Gleichung (3.27) des Skriptes, über die der natürliche, interpolierende kubische Spline berechnet werden kann, positiv definit ist.

Zu Erinnerung: $A \in \mathbb{R}^{l\times l}$ ist positiv definit genau dann, wenn $x^\top Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$. Dies ist äquivalent dazu, dass alle Eigenwerte von A positiv sind. Positiv definite Matrizen sind insbesondere immer regulär.

Aufgabe 17:
Es bezeichne $\mathbb{S} \subset \mathbb{S}^3(\Delta)$ den Raum aller natürlichen kubischen Splines auf $\Delta = (x_0, x_1, x_2)$ mit $x_j = j$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{S} \cap \Pi_3$.

b) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{S}$ mit $s(x_j) = x_j^3$ für $j = 0, 1, 2$.

Aufgabe 18:
Sei

$$B_0(x) := \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1a}$$

und

$$B_{k+1}(x) := \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} B_k(\xi)d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{1b}$$

Zeigen Sie per Induktion über k: $B_k \in \mathbb{S}^k(\Delta_k)$ für $k = 0, \dots$ mit der Zerlegung $\Delta_k := \{-\frac{k+1}{2} + j : j = 0, \dots, k+1\}$, B_k ist nicht-negativ und $B_k(x) = 0$ für $|x| > (k+1)/2$.

Stellen Sie B_0, B_1, B_2 und B_3 grafisch dar.

Aufgabe 19:
Zeigen Sie induktiv, dass für $k = 0, \dots$ die Funktionen

$$B_{k,j}(x) := B_k\left(x + \frac{k-1}{2} - j\right), \qquad j = 0, \dots, k, \tag{2}$$

auf $x \in [0, 1]$ linear unabhängig sind. B_k sind dabei die Splines aus der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 20:

a) Zeigen Sie, dass für das äquidistante Gitter $\Delta = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1)$ die Funktionen

$$B_{3,j} : x \mapsto B_3(nx - j), \qquad j = -1, \dots, n+1, \quad x \in [0, 1], \tag{3}$$

mit dem Spline B_3 aus Aufg.17 linear unabhängig sind und in $\mathbb{S}^3(\Delta)$ liegen.

b) Sei

$$s(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} \alpha_j B_{3,j}(x), \qquad x \in [0, 1],$$

aus $\mathbb{S}^3(\Delta)$ Lösung der Interpolationsaufgabe

$$s(x_j) = y_j, \quad j = 0, \ldots, n, \qquad s'(0) = y_0', \quad s'(1) = y_n'.$$

Verwenden Sie

$$B_3(0) = \frac{2}{3}, \quad B_3(\pm 1) = \frac{1}{6}, \quad B_3'(0) = 0, \quad B_3'(\pm 1) = \mp\frac{1}{2},$$

um ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten α_j herzuleiten.

Hinweis: Die zweite Hälfte der Übungen zur Numerischen Mathematik findet in Projektgruppen mit jeweils 6 Personen statt. Bitte finden Sie sich in solche 6er Gruppen zusammen und melden sich am Mittwoch den 29.10. von 10:00-12:00 bzw. Donnerstag den 30.10. 10:00-11:00 im Büro von Ao. Univ. Prof. Weinmüller (DA 04 M02, 4.Stock im grünen Bereich). Es reicht, wenn sich pro Gruppe nur eine Person mit den 6 Namen und den Matrikelnummern meldet. Sie haben die Möglichkeit, Ihren Wunschprojektleiter zu nennen, wobei wahrscheinlich nicht alle Wünsche berücksichtigt werden können. Gruppen mit weniger als 6 Personen werden wir mit anderen Gruppen bzw. Einzelpersonen zusammenlegen.