Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 4.11.2014 — 31. Oktober 2014

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 5

Aufgabe 21:
Mit Hilfe des Satzes 3.35 aus der Vorlesung ergibt sich der Grundalgorithmus zur FFT wie folgt:

Algorithm 1 FFT

Input: $f \in \mathbb{C}^N$ mit $N = 2^p$

$n = N/2$
Initialisiere Hilfsvektoren $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbb{C}^n$
$\omega_N^0 = 1$
for $j = 0, \dots n-1$ **do**
  $f_j^{(1)} = f_j + f_{j+n}$
  $f_j^{(2)} = (f_j - f_{j+n})\,\omega_N^j$
  $\omega_N^{j+1} = \exp(-2\pi i/N)\omega_N^j$
end for
if $N = 2$ **then**
  Setze $c := (f^{(1)}, f^{(2)})^\top \in \mathbb{C}^2$
else
  Berechne (rekursiv) $c^{(1)} = \mathrm{FFT}(f^{(1)})$
  Berechne (rekursiv) $c^{(2)} = \mathrm{FFT}(f^{(2)})$
  Setze $c = \left(c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, c_1^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_{n-1}^{(1)}, c_{n-1}^{(2)}\right)^\top \in \mathbb{C}^N$
end if

Output: $c = \mathrm{DFT}_N f$

Sei m_p die Anzahl der Multiplikationen und a_p die Anzahl der Additionen für $N = 2^p$. Zeigen Sie:

$$m_p \le p\,2^p, \qquad a_p \le p\,2^p, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt ein Gesamtaufwand von etwa $N\log(N)$ komplexen Additionen bzw. Multiplikationen.

Aufgabe 22:
Zur Interpolation im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir zwei unterschiedliche Polynomräume:

a) Sei das Quadrat Q durch die Eckpunkte $V_1 = (0,0)^\top$, $V_2 = (1,0)^\top$, $V_3 = (1,1)^\top$ und $V_4 = (0,1)^\top$ gegeben. Weiter sei Π_n der Raum aller Polynome auf $[0,1]$ und

$$P_n = \{f : Q \to \mathbb{R} \text{ stetig mit } f(\bullet, y) \in \Pi_n \quad \text{für alle } y \in [0,1] \wedge f(x,\bullet) \in \Pi_n \quad \text{für alle } x \in [0,1]\}.$$

Geben Sie eine Lagrange-Basis von P_1 zu den Stützstellen $V_1, \dots, V_4$ an, d.h. bestimmen Sie $L_1, \dots, L_4 \in P_1$ mit

$$L_j(V_k) = \delta_{jk}, \qquad j,k = 1,\dots,4. \tag{1}$$

b) Es sei das Dreieck T durch die Eckpunkte $V_1 = (0,0)^\top$, $V_2 = (1,0)^\top$ und $V_3 = (0,1)^\top$ gegeben und P_n der Raum aller Linearkombinationen von stetigen Funktionen $f : T \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(\bullet, y) &\in \Pi_l, \qquad y \in [0,1], \quad l \in \mathbb{N}_0 \\ f(x, \bullet) &\in \Pi_k, \qquad x \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

und $k+l = n$. Geben Sie eine Lagrange-Basis von P_1 zu den Stützstellen $V_1, \dots, V_3$ an, d.h. bestimmen Sie $L_1, \dots, L_3 \in P_1$ mit

$$L_j(V_k) = \delta_{jk}, \qquad j,k = 1, \dots, 3. \tag{2}$$

c) Berechnen Sie für beide Fälle $\dim P_n$.

Aufgabe 23:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f(t) = (t-\pi)t(t-2\pi)$ für $t \in [0, 2\pi]$.

a) Berechnen Sie das reelle interpolierende, trigonometrische Polynom für $N = 6$ mit den Stützstellen $t_j = \frac{j\pi}{3}$ und den Stützwerten $f(t_j)$ für $j = 0, \dots, 5$.

b) Analog zu Satz 3.28 kann eine reelle Fourierreihe definiert werden der Form

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k sin(kt)) \tag{3a}$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \qquad k = 0, 1, \dots \tag{3b}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{3c}$$

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und vergleichen Sie diese mit den Koeffizienten des unter (a) berechneten trigonometrischen Polynoms.

Aufgabe 24:
Geben Sie, sofern dies möglich ist, asymptotische Entwicklungen der Form (3.43) für folgende Funktionen an:

a) $f(h) = \frac{\sin(h)}{h}$ für $h > 0$,

b) $f(h) = \log(h) h^p$ für $h > 0$ und $p \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 25:
Implementieren Sie die Richardson-Extrapolation zur Berechnung von $f(0)$ mit $f(h) := \sin(h)/h$ für $h > 0$. Verwenden Sie dazu $q = 1$, $h_k = 2^{-k}$ für $k = 1, \dots, 10$ und $n = 1, 2, 3, 4$. Überprüfen Sie numerisch, ob die theoretischen Konvergenzaussagen aus Satz 3.41 für $n = 1, 2, 3, 4$ zutreffen.

Hinweis: Schauen Sie sich den Quotienten $\frac{f(0) - a_{k,n}}{f(0) - a_{k-1,n}}$ an.