Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 11.11.2014 4. November 2014

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 6

Aufgabe 26:
Beweisen Sie die Fehlerdarstellungen aus Satz 4.7 der Vorlesung zur Trapezregel und zur Simpson-Regel.

Aufgabe 27:
Sei $Q_n(f)$ die Interpolationsquadratur auf dem Intervall $[0,1]$ zu den Stützstellen $x_j = j/n$ für $j = 0,\dots,n$. Zeigen Sie: $Q_n(f)$ hat die Ordnung $n+2$, wenn n gerade ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Newton-Basispolynome.

Aufgabe 28:
Sei $Q_n(f) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$ eine Interpolationsquadratur auf dem Intervall $[0,1]$ zu den paarweise verschiedenen Quadraturknoten $x_0^{(n)},\dots,x_n^{(n)}$. Weiter sei auf dem Intervall $[a,b]$ die summierte Quadraturformel

$$Q_h^{(n)}(f) := \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n} h\alpha_j^{(n)} f(a + h(k + x_j^{(n)})) \tag{1}$$

gegeben mit $h = \frac{b-a}{N}$.

a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ abhängig von a, b und n aber unabhängig von h und f gibt, sodass für alle $f \in C^{n+1}([a,b])$ gilt

$$\left| Q_h^{(n)}(f) - \int_a^b f(x)dx \right| \le C h^{n+1} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|. \tag{2}$$

b) Zeigen Sie: Ist $Q_n(f)$ sogar von der Ordnung $L+1$ mit $L > n$, so existiert ein $C > 0$ unabhängig von h und f mit

$$\left| Q_h^{(n)}(f) - \int_a^b f(x)dx \right| \le C h^{L+1} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(L+1)}(x)| \tag{3}$$

für alle $f \in C^{L+1}([a,b])$.

Aufgabe 29:
Sei $Q_n(f) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$ die Gauß-Quadratur auf $[-1,1]$ zu der zulässigen Gewichtsfunktion w mit $x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}$. Zeigen Sie: Wenn $w(x) = w(-x)$ für alle $x \in (-1,1)$, dann gilt $\alpha_j^{(n)} = \alpha_{n-j}^{(n)}$ und $x_j^{(n)} = -x_{n-j}^{(n)}$ für $j = 0,\dots,n$.

Aufgabe 30:
Seien $Q_n(f)$ die Gauß-Quadraturen auf $\mathbb{R}$ zu der Gewichtsfunktion $w(x) = \exp(-x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Quadraturknoten und Quadraturgewichte für $n = 0, 1, 2$.