Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 18.11.2014 11. November 2014

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 7

Aufgabe 31:
Sei $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ eine bijektive Abbildung und $P_\pi = \left(\delta_{i,\pi(j)}\right)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) P_π ist orthogonal.

b) $P_{\pi_1} P_{\pi_2} = P_{\pi_1 \circ \pi_2}$.

c)

$$P_\pi \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^{-1}(1) \\ \vdots \\ \pi^{-1}(n) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 32:
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix und $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Hauptdiagonaleneinträgen. Zeigen Sie, dass Q und R durch die Gleichung $A = QR$ eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 33:
Seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \dots, n$. Berechnen Sie die Newton-Darstellung von p nicht über die dividierten Differenzen, sondern durch Lösen des Gleichungssystems (3.6). Geben Sie die Anzahl an Rechenoperationen an und vergleichen Sie diese mit der Anzahl der Rechenoperationen für das Schema der dividierten Differenzen.

Aufgabe 34:
a) Zeigen Sie, dass durch

$$(A, B) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}, \qquad A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der Matrizen definiert ist.

b) Sei $\|A\| := \sqrt{(A, A)}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Zeigen Sie

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|, \qquad A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

und

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \, \|x\|_2, \qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n$$

mit der euklidischen Vektorraumnorm $\|\cdot\|_2$.

Aufgabe 35:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{cond}_\infty(A)$.