Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 25.11.2014 24. November 2014

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 8

Aufgabe 36:
Seien $x_1, \dots, x_m$ paarweise verschiedene Stützstellen mit Stützwerten $y_1, \dots, y_m$. Gesucht sei ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $n < m-1$, sodass $\sum_{j=1}^m |p(x_j) - y_j|^2$ minimal wird.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung $p \in \Pi_n$ des Ausgleichsproblems eindeutig ist.

b) Stützstellen und Stützwerte seien gegeben durch

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	2	5	4	4

Berechnen Sie $p \in \Pi_1$, sodass $\sum_{j=1}^5 |p(x_j) - y_j|^2$ minimal wird.

Aufgabe 37:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $A^\dagger$ die Pseudo-Inverse aus Def. 5.20 des Skriptes. Zeigen Sie

a) Falls $m = n$ und A invertierbar, so ist $A^\dagger = A^{-1}$.

b) Falls $\operatorname{rang}(A) = n$, so ist $A^\dagger = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$.

Eine lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ heisst orthogonale Projektion auf den Teilraum $U \subset \mathbb{R}^m$, wenn gilt $\mathcal{R}(P) \subset U$ und $\mathcal{R}(P - I) \subset U^\perp$, wobei $I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die Identität ist.

c) Zeigen Sie, dass $AA^\dagger$ eine orthogonale Projektion auf $\mathcal{R}(A)$ ist.

d) Zeigen Sie, dass $A^\dagger A$ eine orthogonale Projektion auf $\mathcal{N}(A)^\perp$ ist.

Aufgabe 38:
Sei $A_c := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $c \mapsto A_c$ ist als Abbildung von $(-1, 1)$ nach $\mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig.

a) Die Abbildung $c \mapsto A_c^\dagger$ ist als Abbildung von $(-1, 1)$ nach $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wohldefiniert aber nicht stetig.

Aufgabe 39:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $A^{(k)}$ die Folge von Matrizen aus Alg. 6.6 mit Einträgen $a_{ij}^{(k)}$. Zeigen Sie: Wenn für $k = 1, \dots, n$ gilt

$$|a_{kk}^{(k)}| \geq |a_{jk}^{(k)}|, \qquad j = k+1, \dots, n,$$

so ist $\operatorname{cond}_\infty(L) \leq n^3$ und $\operatorname{cond}_\infty(U) \leq n^3 \operatorname{cond}_\infty(A)$.

Aufgabe 40:
Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix

$$A_c := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist diese durchführbar. Wann ist A_c regulär?