**Institute for Analysis and Scientific Computing**
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 13.10.2015 6. Oktober 2015

# Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 1

**Aufgabe 1:**
Für eine Folge $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ aus $[0,4]$ gelte $|2-x_{t+1}| \leq |2-x_t|^p$ für $t \geq 1$ mit $p > 1$. Unter welchen Voraussetzungen an den Startwert $x_1$ ist die Konvergenz dieser Folge garantiert? Wie groß muss $t$ sein, damit $|2-x_t|$ im double precision standard 0 ist?

**Aufgabe 2:**
Sei $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_t\|_2 = \mathcal{O}(a^t)$ und $a < 1$. Weiter sei $z_t := \frac{x-x_t}{\|x-x_t\|_2}$ für $t \in \mathbb{N}$ mit einem beliebigen $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie

$$\left\| z_t - \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = \mathcal{O}(a^t).$$

**Aufgabe 3:**
Eine Matrix-Matrix Multiplikation erfordert relativ viele Rechenoperationen. Der vom Mathematiker Volker Strassen 1969 publizierte Strassen-Algorithmus reduziert die Anzahl der Rechenoperationen. Der Einfachheit halber sei $A, B \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$ und das Produkt $C = AB$ sei zu berechnen. Dafür werden die Matrizen in vier Blöcke der Größe $2^{m-1}$ zerlegt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7, && \text{(1a)} \\ C_{12} &= M_3 + M_5, && \text{(1b)} \\ C_{21} &= M_2 + M_4, && \text{(1c)} \\ C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6. && \text{(1d)} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} M_1 &:= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}), && \text{(2a)} \\ M_2 &:= (A_{21} + A_{22}) B_{11}, && \text{(2b)} \\ M_3 &:= A_{11}(B_{12} - B_{22}), && \text{(2c)} \\ M_4 &:= A_{22}(B_{21} - B_{11}), && \text{(2d)} \\ M_5 &:= (A_{11} + A_{12}) B_{22}, && \text{(2e)} \\ M_6 &:= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}), && \text{(2f)} \\ M_7 &:= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}). && \text{(2g)} \end{aligned}$$

Im Strassen-Algorithmus werden die Multiplikationen in (2) wiederum (rekursiv) mit der obigen Darstellung berechnet.

**a)** Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ermitteln Sie die Anzahl von Multiplikationen und Additionen zur Berechnung des Matrixproduktes $AB$ nach Definition, d.h. ohne Verwendung des Strassen-Algorithmus.

**b)** Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $n = 2^m$. Berechnen Sie die Anzahl der Multiplikationen des Strassen-Algorithmus zur Berechnung von $AB$.

**Aufgabe 4:**
Zur Berechnung der Euler'schen Zahl $e$ könnte man so vorgehen, dass man den Grenzwert

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{3}$$

bzw.

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tag{4}$$

approximiert, indem man $n$ geeignet wählt.

**a)** Wieviele Rechenoperationen benötigen Sie in Abhängigkeit von $n$ zur Approximation von $e$ bei beiden Varianten.

**b)** Schätzen Sie für beide Varianten den Approximationsfehler $\Delta_{\text{app}}(n) := e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bzw. $\Delta_{\text{app}}(n) := e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ in Abhängigkeit von $n$ ab.

*Hinweis:* Verwenden Sie für die erste Variante den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für eine geeignete Funktion $f$ auf dem Intervall $[0, 1/n]$.

**Aufgabe 5:**
Sei $f$ eine Abbildung des normierten linearen Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$ in den normierten linearen Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Dann kann die absolute Konditionszahl des Problems $(f, x)$ (Auswertung von $f$ an der Stelle $x \in X$) als die kleinste Zahl $\kappa \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ definiert werden, sodass für hinreichend kleine $h \in X$ gilt $\|f(x + h) - f(x)\|_Y \le \kappa \|h\|_X$.

Berechnen Sie in diesem Sinne die absolute Konditionszahl der Abbildung $x \mapsto Q(x) := \int_{-1}^{1} \frac{x(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$, wobei $X$ der Raum aller auf dem Intervall $[-1, 1]$ stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|x\|_\infty := \sup_{t\in[-1,1]} |x(t)|$ ist. Für $Y = \mathbb{R}$ verwenden Sie die übliche Betragsfunktion als Norm.

**Aufgabe 6:**
Sei $b \in \mathbb{R}^n$ fix. Berechnen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes über implizite Funktionen die relativen Konditionszahlen des Problems: Gesucht ist die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ bei gegebener invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.