Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 20.10.2015 15. Oktober 2015

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 2

Aufgabe 6:
Sei $b \in \mathbb{R}^n$ fix. Berechnen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes über implizite Funktionen die relativen Konditionszahlen des Problems: Gesucht ist die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ bei gegebener invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 7:
a) Berechnen Sie die relative und absolute Kondition der Auswertung eines durch die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ gegebenen Polynoms

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle x bezüglich Störungen in den Koeffizienten a_i und bezüglich Störungen in x.

b) Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = 8118x^4 - 11482x^3 + x^2 + 5741x - 2030$$

an der Stelle $x = 0.707107$. Das „exakte“ Resultat ist

$$p(x) = -1.9152732527082 \cdot 10^{-11}.$$

Wie ist die Auswertung dieses Polynoms an der Stelle x konditioniert? Wie genau läßt sich $p(x)$ mit einem Rechner bei einfacher Genauigkeit (eps $\approx 10^{-8}$) bestimmen, wenn die Koeffizienten a_i exakt ausgewertet werden können?

c) Ein Rechner, der mit doppelter Genauigkeit (eps $\approx 10^{-16}$) rechnet, liefere bei exakter Auswertung der Koeffizienten den Wert

$$\tilde{p}(x) = -1.9781509763561 \cdot 10^{-11}.$$

Beurteilen Sie das Ergebnis anhand der oben berechneten Konditionszahl(en).

Aufgabe 8:
Die beiden Ausdrücke

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}\right), \qquad x \geq 1 \tag{1}$$

und

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}, \qquad x \geq 1 \tag{2}$$

sind algebraisch äquivalent.

Untersuchen Sie die Stabilität der Auswerteformeln mit Hilfe einer linearen Vorwärtsanalyse und erklären Sie die Ergebnisse. Welche der beiden Formeln ist numerisch sinnvoller?

Aufgabe 9:
Es sei

$$f(x) := \frac{1 - \cos(x)}{x}, \qquad x > 0.$$

a) Ist die Auswertung von $f(x)$ für kleine $|x|$ gut konditioniert?

b) Zeigen Sie, dass die Auswertung von $f(x)$ in dieser Version für kleine $|x|$ instabil ist. Nehmen Sie dabei an, dass die Auswertung von $\cos(x)$ einen relativen Fehler in Höhe der Maschinengenauigkeit hervorruft.

c) Leiten Sie mit Hilfe der Rechenregeln für trigonometrische Funktionen eine stabile Auswerteformel für kleine $|x|$ her. Auch hier können Sie annehmen, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ mit Maschinengenauigkeit berechnet werden können.

Aufgabe 10:
Approximieren Sie $\sqrt{2}$ durch $p(1/2)$, wobei $p \in \Pi_3$ das Interpolationspolynom zu

$$p(x) = 2^x, \qquad x = -1, 0, 1, 2$$

ist. Verwenden Sie dazu das Aitken-Neville Schema.

Aufgabe 11:
Seien die Stützstellen $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ und $x_4 = 5$ gegeben. Stellen Sie die Lagrange- und die Newton-Basispolynome grafisch dar. Achten Sie dabei insbesondere auf die Werte an den Stützstellen.

Aufgabe 12:
Sei

$$R(l,m) := \{x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}\ ,\ p \in \Pi_l,\ q \in \Pi_m \setminus \{0\}\}$$

die Menge aller rationalen Funktionen mit maximalem Zählergrad l und Nennergrad m. Weiter seien $x_0, ..., x_n$ mit $n := l + m$ paarweise Verschiedene Stützstellen und $f_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n$ vorgegebene Daten. Gesucht ist für gegebene l, m eine rationale Funktion $r^{(l,m)} \in R(l,m)$, sodass die Interpolationsbedingungen

$$r^{(l,m)}(x_i) = f_i, \qquad i = 0, ..., n, \tag{3}$$

erfüllt sind.

a) Zeigen Sie, dass eine notwendige Bedingung an das Zählerpolynom p und Nennerpolynom q von $r^{(l,m)}$ gegeben ist durch

$$p(x_i) - f_i q(x_i) = 0, \qquad i = 0, ..., n. \tag{4}$$

Ist (4) lösbar?

b) Zeigen Sie: Sei $(p,q) \in (\Pi_l \times \Pi_m) \setminus \{0\}$ Lösung von (4). Dann ist $\frac{p}{q} \in R(l,m)$, aber $\frac{p}{q}$ löst nicht notwendig (3).

c) Zeigen Sie: Seien (p_1, q_1) und (p_2, q_2) aus $(\Pi_l \times \Pi_m) \setminus \{0\}$ Lösungen von (4). Dann gilt $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$.