Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 27.10.2014 — 20. Oktober 2015

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 3

Hinweis: Die Anmeldung zu den Kleingruppen am 29. Oktober findet ab 10.00 Uhr im Büro DA 04 M02 durch Ao.Univ.Prof. Ewa Weinmüller statt. Bitte bilden Sie wenn möglich vorher 6er Gruppen und schicken eine VertreterIn mit den Matrikelnummern der TeilnehmerInnen zur Anmeldung. Einzelanmeldungen sind ab 12:00Uhr auch noch übers TISS-System möglich.

Aufgabe 13:
Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und $p \in \Pi_2$ das interpolierende Polynom mit

$$p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p(2) = f(2).$$

a) Berechnen Sie $p'(0)$.

b) Zeigen Sie folgende Fehlerabschätzung:

$$|p'(0) - f'(0)| \leq \frac{1}{3}\|f^{(3)}\|_\infty.$$

Aufgabe 14:
a) Zeigen Sie, dass für die Chebyshev-Polynome $T_n \in \Pi_n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_j(x)\, T_k(x)\, dx = 0, \qquad j \neq k.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $p \in \Pi_{n-1}$ existiert, so dass gilt

$$\max_{x\in[-1,1]} |x^n - p(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Mit anderen Worten für großes n wird $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ auf dem Intervall $[-1,1]$ fast linear abhängig.

Aufgabe 15:
Lösen Sie mit dem Verfahren der Dividierten Differenzen die Hermite Interpolationsaufgabe: Gesucht ist $p \in \Pi_5$ mit

$$p(-1) = \frac{1}{2}, \quad p'(-1) = \frac{1}{4}, \quad p''(-1) = \frac{1}{4}, \quad p(0) = 1, \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad p'\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

Geben Sie das interpolierende Polynom in der Monombasis an.

Aufgabe 16:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Stützstellen aus dem Intervall $[a,b]$. Zeigen Sie, dass für die interpolierenden Polynome $p_n \in \Pi_n$ der Funktionen

$$f(x) := \cos(\lambda x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \text{und} \qquad f(x) := x^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{N},$$

mit $p_n(x_j) = f(x_j)$ für $j = 0, \ldots, n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |p_n(x) - f(x)| = 0.$$

Aufgabe 17:
Seien $x_0, \dots, x_m$ paarweise verschiedene Stützstellen aus dem Intervall $[a,b]$, $f \in C^{2m+2}([a,b])$ und $p \in \Pi_{2m+1}$ das Hermite-Interpolationspolynom zu der Funktion f mit

$$p(x_j) = f(x_j), \qquad p'(x_j) = f'(x_j), \qquad j = 0, \dots, m.$$

Zeigen Sie: Für alle $x \in [a,b]$ existiert ein $\xi \in [a,b]$ sodass

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \prod_{j=0}^{m} (x - x_j)^2.$$

Aufgabe 18:
Zur Interpolation im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir zwei unterschiedliche Polynomräume:

(a) $\Pi_{n,m}$ bezeichnet den Raum aller Linearkombiationen von Polynomen der Form

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^k y^j \in \mathbb{R}, \qquad k = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.$$

(b) P_n bezeichnet den Raum aller Linearkombiationen von Polynomen der Form

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^k y^j \in \mathbb{R}, \qquad j,k = 0, \dots, n, \quad j + k \leq n.$$

a) Sei das Quadrat Q durch die Eckpunkte $V_1 = (0,0)^\top$, $V_2 = (1,0)^\top$, $V_3 = (1,1)^\top$ und $V_4 = (0,1)^\top$ gegeben. Geben Sie eine Lagrange-Basis von $\Pi_{1,1}$ zu den Stützstellen $V_1, \dots, V_4$ an, d.h. bestimmen Sie $L_1, \dots, L_4 \in \Pi_{1,1}$ mit

$$L_j(V_k) = \delta_{jk}, \qquad j,k = 1, \dots, 4.$$

b) Es sei das Dreieck T durch die Eckpunkte $V_1 = (0,0)^\top$, $V_2 = (1,0)^\top$ und $V_3 = (0,1)^\top$ gegeben. Geben Sie eine Lagrange-Basis von P_1 zu den Stützstellen $V_1, \dots, V_3$ an, d.h. bestimmen Sie $L_1, \dots, L_3 \in P_1$ mit

$$L_j(V_k) = \delta_{jk}, \qquad j,k = 1, \dots, 3.$$

c) Berechnen Sie die Dimensionen von $\Pi_{n,n}$ und P_n.