Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 3.11.2015 28. Oktober 2015

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 4

Aufgabe 19:
Sei Δ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $y_j \in \mathbb{R}, j = 0, \ldots, n$, die zugehörigen Stützwerte. Zeigen Sie, dass es genau einen Spline $s \in \mathbb{S}^2(\Delta)$ gibt mit

$$s(x_j) = y_j, \qquad j = 0, \ldots, n, \quad s'(x_0) = 0.$$

Geben Sie ein Verfahren zur Berechnung von s an.

Aufgabe 20:
Sei Δ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Zeigen Sie, dass

a) $\dim\left(\mathbb{S}^1(\Delta)\right) = n + 1$ und dass

b) $\dim\left(\mathbb{S}^k(\Delta)\right) = n + k$ für $k \geq 2$.

Hinweis : Verwenden Sie für (a) die explizite Darstellung des linearen Splines aus dem Vorlesungsskript. (b) folgt dann aus (a), da für ein $s \in \mathbb{S}^k(\Delta)$ gilt $s^{(k-1)} \in \mathbb{S}^1(\Delta)$.

Aufgabe 21:
Sei

$$B_0(x) := \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1a}$$

und

$$B_{k+1}(x) := \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} B_k(\xi) d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{1b}$$

a) Berechnen Sie B_0, B_1, B_2 und B_3 und stellen Sie die Funktionen grafisch dar.

b) Zeigen Sie per Induktion über k: $B_k \in \mathbb{S}^k(\Delta_k)$ für $k = 0, \ldots$ mit der Zerlegung $\Delta_k := \{-\frac{k+1}{2} + j : j = 0, \ldots, k + 1\}$, B_k ist nicht-negativ und $B_k(x) = 0$ für $|x| > (k + 1)/2$.

Aufgabe 22:
Zeigen Sie induktiv, dass für $k = 0, \ldots$ die Funktionen

$$B_{k,j}(x) := B_k\left(x + \frac{k-1}{2} - j\right), \qquad j = 0, \ldots, k, \tag{2}$$

auf $x \in [0, 1]$ linear unabhängig sind. B_k sind dabei die Splines aus der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 23:
Zeigen Sie, dass für das äquidistante Gitter $\Delta = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$ die Funktionen

$$B_{3,j} : x \mapsto B_3\left(nx - j\right), \qquad j = -1, \ldots, n + 1, \quad x \in [0, 1], \tag{3}$$

mit dem Spline B_3 aus Aufg.21 eine Basis von $\mathbb{S}^3(\Delta)$ bilden.

Aufgabe 24:
Sei $\Delta = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$ wie in Aufg. 23 und

$$s(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} \alpha_j B_{3,j}(x), \qquad x \in [0,1],$$

aus $\mathbb{S}^3(\Delta)$ Lösung der Interpolationsaufgabe

$$s(x_j) = y_j, \quad j = 0, \ldots, n, \qquad s'(0) = y_0', \quad s'(1) = y_n'.$$

a) Verwenden Sie

$$B_3(0) = \frac{2}{3}, \quad B_3(\pm 1) = \frac{1}{6}, \quad B_3'(0) = 0, \quad B_3'(\pm 1) = \mp\frac{1}{2},$$

um ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten α_j herzuleiten.

b) Lösen sie das lineare Gleichungssstem für $n = 2$ und $y_j := f(x_j)$, $j = 0, 1, 2$, $y_0' = f'(0)$ und $y_2' = f'(1)$ mit $f(x) := x^3$. Vergleichen Sie für $x \in [0,1]$ den interpolierenden Spline mit der Funktion f.