Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 10.11.2015 2. November 2015

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 5

Aufgabe 25:
Sei Δ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, $f \in C^6([a, b])$ und $s \in \mathbb{S}_2^5(\Delta)$ so, dass

$$s(x_j) = f(x_j), \quad s'(x_j) = f'(x_j), \quad s''(x_j) = f''(x_j), \qquad j = 0, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{h^6}{720} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(6)}(x)| \qquad \text{mit } h := \max_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}).$$

Aufgabe 26:
Mit Hilfe des Satzes 3.35 aus der Vorlesung ergibt sich der Grundalgorithmus zur FFT wie folgt:

Algorithm 1 FFT

Input: $f \in \mathbb{C}^N$ mit $N = 2^p$

$n = N/2$
Initialisiere Hilfsvektoren $f^{(1)}, f^{(2)} \in \mathbb{C}^n$
$\omega_N^0 = 1$
for $j = 0, \dots n - 1$ **do**
  $f_j^{(1)} = f_j + f_{j+n}$
  $f_j^{(2)} = (f_j - f_{j+n})\, \omega_N^j$
  $\omega_N^{j+1} = \exp(-2\pi i/N)\omega_N^j$
end for
if $N = 2$ **then**
  Setze $c := (f^{(1)}, f^{(2)})^\top \in \mathbb{C}^2$
else
  Berechne (rekursiv) $c^{(1)} = \text{FFT}(f^{(1)})$
  Berechne (rekursiv) $c^{(2)} = \text{FFT}(f^{(2)})$
  Setze $c = \left(c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, c_1^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_{n-1}^{(1)}, c_{n-1}^{(2)}\right)^\top \in \mathbb{C}^N$
end if

Output: $c = \text{DFT}_N f$

Sei m_p die Anzahl der Multiplikationen und a_p die Anzahl der Additionen für $N = 2^p$. Zeigen Sie:

$$m_p \leq p\, 2^p, \qquad a_p \leq p\, 2^p, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt ein Gesamtaufwand von etwa $N \log(N)$ komplexen Additionen bzw. Multiplikationen.

Aufgabe 27:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f(t) = (t - \pi)t(t - 2\pi)$ für $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie das reelle interpolierende, trigonometrische Polynom für $N = 6$ mit den Stützstellen $t_j = \frac{j\pi}{3}$ und den Stützwerten $f(t_j)$ für $j = 0, \dots, 5$.

Aufgabe 28:
Geben Sie, sofern dies möglich ist, asymptotische Entwicklungen der Form (3.43) für folgende Funktionen an:

a) $f(h) = \frac{\sin(h)}{h}$ für $h > 0$,

b) $f(h) = \log(h)h^p$ für $h > 0$ und $p \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 29:
Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ habe eine Entwicklung der Form

$$f(h) = a_0 + \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell h^\ell + a_{n+1} h^{n+1}, \qquad h > 0$$

mit Konstanten $a_\ell \in \mathbb{R}$ für $\ell = 0, \ldots, n+1$ und $a_{n+1} > 0$. Weiter sei $(a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ für fixes $n \in \mathbb{N}$ die Folge der Richardson-Extrapolationen nach Satz 3.41, d.h. $a_{k,n} := p_n^{(k)}(0)$. Die Folge des Stützstellen $(h_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ erfülle die Voraussetzungen aus Satz 3.41.

a) Zeigen Sie, dass für gerades (ungerades) n die Folge $(a_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend (steigend) gegen $f(0)$ konvergiert.

b) Sei $b_{k,n} := 2a_{k+1,n} - a_{k,n}$ und $\rho^{n+1} < 1/3$. Zeigen Sie, dass für gerades (ungerades) n die Folge $(b_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigend (fallend) gegen $f(0)$ konvergiert.

c) Leiten Sie daraus ein Abbruchkriterium her: Wenn für ein $k \in \mathbb{N}$ die Bedingung $|b_{k,n} - a_{k,n}| < \mathrm{TOL}$ erfüllt ist, dann ist $|a_{k,n} - f(0)| < \mathrm{TOL}$.

Aufgabe 30:
Verwenden Sie die Richardson-Extrapolation zur Berechnung von $f(0)$ mit $f(h) := \frac{1-\cos(h)}{h}$ für $h > 0$. Verwenden Sie dazu $q = 1$, $h_k = 2^{-k}$ für $k = 1, \ldots, 10$ und $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Überprüfen Sie numerisch, ob die theoretischen Konvergenzaussagen aus Satz 3.41 für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ zutreffen.

Hinweis: Schauen Sie sich die Quotienten $\frac{f(0)-a_{k,n}}{f(0)-a_{k-1,n}}$ an.