Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 17.11.2014 10. November 2015

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 6

Aufgabe 31:
Sei $f \in C([0,3])$. Bestimmen Sie die interpolatorische Quadraturformel der Form

$$Q_2(f) := \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2)$$

zur Approximation des Integrals $Q(f) = \int_0^3 f(x)dx$. Welche Ordnung hat diese Quadraturformel?

Aufgabe 32:
Beweisen Sie die Fehlerdarstellungen aus Satz 4.7 der Vorlesung zur Trapezregel und zur Simpson-Regel.

Aufgabe 33:
Sei $Q_n(f)$ die Interpolationsquadratur auf dem Intervall $[0,1]$ zu den Stützstellen $x_j = j/n$ für $j = 0,\dots,n$. Zeigen Sie: $Q_n(f)$ hat die Ordnung $n+2$, wenn n gerade ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Newton-Basispolynome.

Aufgabe 34:
Sei $Q_n(f) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j)$ eine Interpolationsquadratur der Ordnung $L \geq n+1$ auf dem Intervall $[0,h]$, $h > 0$, zu den paarweise verschiedenen Quadraturknoten $x_0,\dots,x_n \in [0,h]$. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C^L([0,h])$ gilt

$$\left| Q_n(f) - \int_0^h f(x)dx \right| \leq \frac{h^{L+1}}{L!} \sup_{x\in[0,h]} |f^{(L)}(x)|. \tag{1}$$

Hinweis: Fügen Sie für $L > n+1$ der Quadraturformel künstliche Quadraturknoten hinzu.

Aufgabe 35:
Mit wievielen Funktionsauswertungen kann das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-s} berechnet werden?

a) Mit Hilfe der summierten Trapezregel?

b) Mit Hilfe der summierten Simpson-Regel?

Vergleichen Sie die Ergebnisse für $s = 4$ und $s = 8$.

Aufgabe 36:
Sei $f \in C^s(\mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion, $n \in \mathbb{N}$, $N := 2n+1$ und q_N das trigonometrische Interpolationspolynom der Form

$$q_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

von f. Die Stützstellen seien wie in Korollar 3.33 des Vorlesungsskriptes durch $t_j := 2\pi j/N$, $j = 0,\dots,N-1$ gegeben. Weiter sei $Q(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ das exakte Integral und $Q_N(f) := Q(q_N)$ eine Quadraturformel.

a) Zeigen Sie, dass Q_N eine summierte Rechtecksregel ist.

b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C_s > 0$ gibt mit

$$|Q(f) - Q_N(f)| \leq C_s N^{-s} \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 + |f^{(s)}(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

d.h. die summierte Rechtecksregel konvergiert für 2π-periodische, glatte Funktionen schneller als jede Potenz N^s von N.

Hinweis zu b: Für Funktionen $f, g \in L^2([a,b])$ gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, d.h.

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right).$$