Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 24.11.2015 18. November 2015

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 7

Aufgabe 37:
Sei $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$ die Gauß-Quadratur auf $[-1,1]$ zu der zulässigen Gewichtsfunktion w mit $x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}$. Zeigen Sie: Wenn $w(x) = w(-x)$ für alle $x \in (-1,1)$, dann gilt $\alpha_j^{(n)} = \alpha_{n-j}^{(n)}$ und $x_j^{(n)} = -x_{n-j}^{(n)}$ für $j = 0, \ldots, n$.

Aufgabe 38:
Sei (f_n) eine Funktionenfolge mit

$$f_{-1}(x) \equiv 0, \qquad f_0(x) \equiv 1, \qquad f_{n+1}(x) = (x-\beta_n) f_n(x) - \gamma_n^2 f_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $f_{n+1}(x) = \det(T_{n+1}(x))$ mit der Matrix $T_{n+1}(x) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ gegeben durch

$$T_{n+1}(x) := \begin{pmatrix} x-\beta_0 & -\gamma_1 & & \\ -\gamma_1 & x-\beta_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\gamma_n \\ & & -\gamma_n & x-\beta_n \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f_{n+1} genau die Eigenwerte von $-T_{n+1}(0)$ sind.

Aufgabe 39:
Seien $Q_n(f)$ die Gauß-Quadraturen auf $\mathbb{R}$ zu der Gewichtsfunktion $w(x) = \exp(-x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Quadraturknoten und Quadraturgewichte für $n = 0, 1, 2$.

Aufgabe 40:
a) Zeigen Sie, dass durch

$$(A, B) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ij}}, \qquad A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der Matrizen definiert ist.

b) Sei $\|A\| := \sqrt{(A,A)}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Zeigen Sie

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|, \qquad A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

und

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \, \|x\|_2, \qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n$$

mit der euklidischen Vektorraumnorm $\| \cdot \|_2$.

Aufgabe 41:
Beweisen Sie Satz 5.6 des Vorlesungsskriptes.

Aufgabe 42:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{cond}_\infty(A)$.