Institute for Analysis and Scientific Computing
Assistant Prof. Lothar Nannen

Übungstermin: 1.12.2015 — 24. November 2015

Übung zur Numerischen Mathematik A/B – Übung 8

Aufgabe 43:
Seien $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Stützstellen mit Stützwerten $y_1, \ldots, y_m$. Gesucht sei ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $n < m-1$, sodass $\sum_{j=1}^m |p(x_j) - y_j|^2$ minimal wird.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes 5.17, dass die Lösung $p \in \Pi_n$ des Ausgleichsproblems eindeutig ist.

b) Stützstellen und Stützwerte seien gegeben durch

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	2	-1	0	3	13	14

Berechnen Sie $p \in \Pi_2$, sodass $\sum_{j=1}^6 |p(x_j) - y_j|^2$ minimal wird. Skizzieren Sie p und die dazugehörigen Stützstellen und Stützwerte.

Aufgabe 44:
Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $\operatorname{rang}(A) = n$. Zeigen Sie: Es existiert eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und eine Matrix $R = (r_{ij})_{ij} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $r_{ij} = 0$ für $i = j+1, \ldots, m$ und $r_{jj} > 0$ für $j = 1, \ldots, n$ sodass $A = QR$.

Hinweis: Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren.

Aufgabe 45:
Sei $m \geq n$, $A = QR \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit Matrizen $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $R \in \mathbb{C}^{m \times n}$ der Form

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

und $Q_{11}, R_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $Q_{21} \in \mathbb{C}^{(m-n) \times n}$, $Q_{12} \in \mathbb{C}^{n \times (m-n)}$ und $Q_{22} \in \mathbb{C}^{(m-n) \times (m-n)}$. Weiters sei Q unitär und R_1 eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Hauptdiagonaleneinträgen.

Zeigen Sie, dass damit R_1, Q_{11} und Q_{21} eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 46:
Seien A, Q, R wie in Aufgabe 45 und $b \in \mathbb{C}^m$. Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{C}^n$ genau dann Lösung der Normalengleichung $A^*Ax = A^*b$ ist, wenn es $R_1 x = (Q_{11}^*, Q_{21}^*)\, b$ löst. Wieviele Rechenoperationen sind zur Berechnung von x notwendig, wenn R_1, Q_{11} und Q_{21} bereits vorhanden sind.

Aufgabe 47:
Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix

$$A_c := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist Alg. 6.6 durchführbar. Wann ist A_c regulär?

Aufgabe 48:
Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $j = 1, \dots, i-2, i+2, \dots, n$ und $i = 1, \dots, n$.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, welcher eine LU-Zerlegung von A mit normierter unterer Dreicksmatrix L und oberer Dreiecksmatrix U in $\mathcal{O}(n)$ Rechenoperationen berechnen kann.

b) Es gelte zusätzlich $|a_{ii}| > |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}|$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $a_{10} = a_{n(n+1)} = 0$. (Die Matrix ist dann strikt diagonaldominant.) Zeigen Sie, dass der unter (a) entwickelte Algorithmus unter dieser Voraussetzung immer durchführbar ist.

Hinweis zu b: Schätzen Sie $\left|a_{i(i+1)}/u_{ii}\right|$ ab.