Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
08. März 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 1

Aufgabe 1*. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit n Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{K}$. Dann existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $R = \overline{Q}^T AQ$, d.h. A ist *orthogonal trigonalisierbar*. Man bezeichnet diese Darstellung von A als *Schur-Faktorisierung*.

Hinweis. Der Beweis folgt mittels Induktion nach n. Für die Rückführung $n \mapsto n-1$ gehe man wie folgt vor: Es sei $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$, sodass v_1 Eigenvektor zu λ_1 ist. Mit x_j als j-ter Spalte der Matrix $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ untersuche man $\overline{X}^T AX$.

Aufgabe 2. Es sei $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit Blockstruktur

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$

mit Blöcken $T_{11} \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $T_{22} \in \mathbb{C}^{q\times q}$ und $T_{12} \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $p + q = n$. Für das Spektrum $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda \text{ Eigenwert von } T\}$ von T gilt dann

$$\sigma(T) = \sigma(T_{11}) \cup \sigma(T_{22}).$$

Ferner bildet $\{(x, 0) \in \mathbb{C}^n \,|\, x \in \mathbb{C}^p\}$ einen T-invarianten Unterraum von $\mathbb{C}^n$.

Hinweis. Man kann den Beweis elementar führen, d.h. entsprechende Eigenvektoren konstruieren. Alternativ verwende man die Schur-Zerlegung.

Aufgabe 3. Gegeben seien eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Indizes $1 \le j, k, \ell \le n$ mit $j \neq k$ und $\ell \notin \{j, k\}$. Gilt $a_{k\ell} \neq 0$, so existiert eine Givens-Rotation $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass für $B := G^T AG$ gilt $b_{k\ell} = 0$ sowie $b_{pq} = a_{pq}$ für alle Indizes $p, q \notin \{j, k\}$.

Programmieraufgabe 1. Man schreibe eine MATLAB-Funktion `B = reduktion(A)`, die eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch Ähnlichkeitstransformationen mittels geeigneter Givens-Rotationen in Tridiagonalgestalt $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ überführt.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 14.03.2006, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Mittwoch 15.03.2006, 12:00 Uhr, per Mail an `dirk.praetorius@tuwien.ac.at` (Betreff: *Numerik UE Matlab*). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung am 15.03.2006 vorzubereiten.