Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
24. Mai 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 10

Aufgabe 37*. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ erfüllt die *einseite Lipschitzbedingung* mit Konstante L falls

$$\operatorname{Re} \langle f(t,y) - f(t,\widehat{y}), y - \widehat{y} \rangle \leq L \|y - \widehat{y}\|_2^2 \qquad \forall (t,y), (t,\widehat{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n.$$

Ist f stetig, und erfüllen y, $\widehat{y}$ die Gleichungen $y' = f(t,y)$, $\widehat{y}' = f(t,\widehat{y})$ für $t \geq t_0$, so folgt

$$\|y(t) - \widehat{y}(t)\|_2 \leq \|y(t_0) - \widehat{y}(t_0)\|_2 e^{L(t-t_0)}, \qquad t \geq t_0.$$

Aufgabe 38. Falls die einseitige Lipschitzkonstante $L = 0$ ist, heißt die ODE *nicht-expansiv.* Ein RK-Verfahren heißt B-stabil, falls sich die Nicht-Expansivität ins Diskrete vererbt, d.h. für jeden Schritt $h \geq 0$ und Anfangsdaten y_0, $\widehat{y}_0$ gilt für die entsprechenden Werte y_1 und $\widehat{y}_1$ nach einem Schritt die Bedingung $\|y_1 - \widehat{y}_1\|_2 \leq \|y_0 - \widehat{y}_0\|_2$. Man zeige, dass B-stabile RK-Verfahren A-stabil sind.

Aufgabe 39*. Man zeige, dass Gauß-Verfahren B-stabil sind.
Hinweis. Imitieren Sie den Beweis von Aufgabe 37 und nutzen Sie, dass Gauß-Verfahren Kollokationsverfahren mit s Knoten sind und dass die induzierte Quadratur vom Exaktheitsgrad $2s - 1$ ist.

Aufgabe 40. Gegeben Sei ein implizites s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Daten $b, c \in \mathbb{R}^s$ und $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Anstatt in einem Schritt des Verfahrens den impliziten Stufenvektor $k \in \mathbb{R}^n$ exakt zu berechnen (als Limes der Fixpunktiteration), führen wir nur m Schritte der Fixpunktiteration durch. Mit dem Startwert $k^{(0)} := f(x_\ell, y_\ell)$ erhalten wir also eine Approximation $\widetilde{k} := k^{(m)} \in \mathbb{R}^s$ von k. Dieses Vorgehen definiert das Einschrittverfahren

$$y_{\ell+1} = y_\ell + h \sum_{j=1}^{s} b_j \widetilde{k}_j \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Ist dieses Verfahren A-stabil?

Aufgabe 41. Wir betrachten autonome Differentialgleichungen $y' = f(y)$. Betrachten Sie das *linear implizite Eulerverfahren*: $y_{\ell+1} = y_\ell + hk_1$, wobei k_1 die Lösung von $(1 - hJ)k_1 = f(y_\ell)$

mit der Jacobi-Matrix $J = D_y f(y_\ell)$ ist. Zeigen Sie, dass das linear implizite Eulerverfahren Konsistenzordnung 1 hat. Ist das Verfahren A-stabil? Was ist die Stabilitätsfunktion?

Programmieraufgabe 14. Implementieren Sie eine Matlab- Funktion

```
y = ieuler(t,f,fprime,y0)
```

die das implizite Euler-Verfahren zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(t,y)$ mit $y(t_1) = y_0$ realisiert. Dabei ist $t \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor mit den Stützstellen des Verfahrens, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ ist ein Spaltenvektor mit dem Anfangswert und `f` und `fprime` sind Funktionshandles für die Funktion $f(x,y)$ sowie deren Jacobi-Matrix $D_y f(x,y)$. In jedem Schritt werde das implizite Gleichungssystem zur Berechnung von k_1 mit einem Newton-Verfahren realisiert. Man teste die Funktion anhand der Van-der-Pol-Gleichung aus Programmieraufgabe 10.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 30.05.2006, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Mittwoch 31.05.2006, 12:00 Uhr, per Mail an `dirk.praetorius@tuwien.ac.at` (Betreff: *Numerik UE Matlab*). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung am 31.05.2006 vorzubereiten.