

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 11

Aufgabe 42. Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion des θ -Schemas. Für welche θ ist das θ -Schema A-stabil, für welche L-stabil?

Aufgabe 43. Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet für das θ -Schema mit $\theta = 1/2$.

Aufgabe 44. Für ein lineares k -Schrittverfahren ist Folgendes paarweise äquivalent:

- (i) Das Verfahren hat Konsistenzordnung p
- (ii) Es gelten $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$ und $\sum_{j=0}^k \alpha_j j^q = q \sum_{j=0}^k \beta_j j^{q-1}$ für alle $q = 1, \dots, p$.
- (iii) Der Abschneidefehler erfüllt $R(t, \pi_p, h) = 0$ für alle Polynome π_p vom Grad p .

Aufgabe 45. Welche Konsistenzordnung haben das Adams-Bashforth-Verfahren und das Adams-Moulton-Verfahren?

Programmieraufgabe 15. Implementieren Sie eine MATLAB- Funktion

```
y = lieuler(t,f,fprime,y0)
```

die das linear-implizite Euler-Verfahren aus Aufgabe 41 zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y)$ mit $y(t_1) = y_0$ realisiert. Dabei ist $t \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor mit den Stützstellen des Verfahrens, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ ist ein Spaltenvektor mit dem Anfangswert, und \mathbf{f} und \mathbf{fprime} sind Funktionshandles für die Funktion $f(y)$ sowie deren Jacobi-Matrix $D_y f(y)$. Der Rückgabewert y ist eine $d \times n$ Matrix, deren Spalte $y(:,k)$ die Approximation y_k zum Zeitpunkt t_k enthält.

Programmieraufgabe 16. Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3 \\ y_2' &= 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2 \\ y_3' &= 3 \cdot 10^7 y_2^2 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = (1, 0, 0)$. Bei $t = 0.3$ ist der "exakte" Wert $y_2(0.3) = 3.447715743690469 \cdot 10^{-5}$. Visualisieren Sie die Konvergenz von explizitem, implizitem und linear-implizitem Eulerverfahren für dieses System, indem Sie den Fehler in y_2 im Endzeitpunkt $t = 0.3$ für uniforme Gitter in Abhängigkeit von der Anzahl n an Stützstellen plotten. Zusätzlich visualisiere man die entsprechenden Konvergenzordnungen. Der Plot (6 *verschiedenfarbige* Konvergenzgraphen in einem Bild) ist im eps-Format abzugeben. Bitte markieren Sie die gerechneten Werte auf den 3 Fehlerkurven geeignet.