Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
09. Juni 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 12

Aufgabe 46. Zeigen Sie, dass bei einem konsistenten Mehrschrittverfahren $\lambda = 1$ eine einfache Nullstelle des ersten charakteristischen Polynoms ist.

Aufgabe 47. Zeigen Sie, dass die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton nullstabil sind.

Aufgabe 48. Es bezeichne $\rho(A)$ den Spektralradius einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt

$$\rho(A) = \inf \big\{ \|A\| \,\big|\, \|\cdot\| \text{ induzierte Operatornorm auf } \mathbb{K}^{n\times n} \big\}.$$

Sind ferner alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A mit $\rho(A) = |\lambda|$ einfach, so wird das Infimum als Minimum angenommen.
Hinweis. Man verwende die Jordansche Normalform und erinnere sich an die Vorlesung zur Numerischen Mathematik.

Aufgabe 49. Ein allgemeines k-Schrittverfahren (α, Φ) hat die Form

$$y_{\ell+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{\ell+j} = h\Phi(x_\ell, \dots, x_{\ell+k}, y_\ell, \dots, y_{\ell+k}, h),$$

wobei (α, Φ) explizit ist, wenn Φ nicht von $y_{\ell+k}$ abhängt, und anderenfalls implizit. Die Nullstabilität lässt sich wie für lineare Mehrschrittverfahren über das erste charakteristische Polynom definieren. Man zeige, dass jedes Runge-Kutta-Verfahren ein nullstabiles 1-Schrittverfahren ist.

Aufgabe 50. Für allgemeine k-Schrittverfahren (α, Φ) kann man analog zu den linearen Mehrschrittverfahren den Abschneidefehler und damit die Konsistenzordnung von (α, Φ) definieren. Wir nehmen an, dass die Funktion Φ Lipschitz-stetig im y-Vektor sei, d.h.

$$\|\Phi(x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k, h) - \Phi(x_0, \dots, x_k, z_0, \dots, z_k, h)\| \le L \,\|(y_0, \dots, y_k) - (z_0, \dots, z_k)\|$$

für alle $h > 0$, x_j sowie y_j und z_j. Man zeige, dass gilt

$$\text{Lipschitz in } y + \text{Nullstabilität} + \text{Konsistenzordnung } p \quad \Rightarrow \quad \text{Konvergenzordnung } p,$$

d.h. für Startwerte $y_0, \dots, y_{k-1}$ mit $\max\limits_{j=0,\dots,k-1} |y_j - y(x_j)| \le \varepsilon$ folgt

$$\max_{j=0,\dots,n} |y_j - y(x_j)| \le C(h^p + \varepsilon),$$

wobei $y(t)$ die (hinreichend glatte) Lösung eines Anfangswertproblems sei auf einem Intervall $[a,b]$ und $h = (b-a)/n$.
Hinweis. Imitieren Sie den Beweis aus der Vorlesung.

Aufgabe 51. Durch die Koeffizienten (α^*, β^*) und (α, β) sei ein ein explizites lineares k-Schrittverfahren und ein implizites lineares k-Schrittverfahren gegeben. Beim Prädiktor-Korrektor-Verfahren bestimmt man aus $y_\ell, \dots, y_{\ell+k-1}$ zunächst eine Folge $y_{\ell+k}^{(0)}, \dots, y_{\ell+k}^{(M)}$ durch

$$y_{\ell+k}^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{\ell+j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f(t_{\ell+j}, y_{\ell+j})$$
$$y_{\ell+k}^{(m)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{\ell+j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t_{\ell+j}, y_{\ell+j}) + h\beta_k f(t_{\ell+k}, y_{\ell+k}^{(m-1)}) \quad \text{für } m = 1, \dots, M$$

und definiert schließlich

$$y_{\ell+k} := y_{\ell+k}^{(M)}.$$

Man berechnet also zunächst eine Approximation $y_{\ell+k}^{(0)}$ mit Hilfe des expliziten Prädiktors (α^*, β^*) und verbessert diese dann in M Schritten einer Fixpunktiteration für den impliziten Korrektor (α, β). Für dieses Vorgehen zeige man die folgenden Aussagen, wobei wieder die Lipschitz-Stetigkeit von $f(x,y)$ in y vorausgesetzt werde.
(i) Das Prädiktor-Korrektor-Verfahren ist ein explizites (nicht-lineares) Mehrschrittverfahren, das Lipschitz-stetig in y ist.
(ii) Ist (α, β) nullstabil, so ist auch das Prädiktor-Korrektor-Verfahren nullstabil.
(iii) Ist (α^*, β^*) von der Konsistenzordnung p^* und (α, β) von der Konsistenzordnung $p \geq p^* + M$, so hat das Prädiktor-Korrektor-Verfahren Konsistenzordnung $p^* + M$.

Aufgabe 52. Wir betrachten das Prädiktor-Korrektor-Verfahren für das explizite Euler-Verfahren als Prädiktor und das implizite Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 als Korrektor.
(i) Man leite eine explizite Formel für das Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 her.
(ii) Wie viele Iterationsschritte sind notwendig, damit das Prädiktor-Korrektor-Verfahren Konsistenzordnung 3 hat?
(iii) Welches Einschrittverfahren könnte man verwenden, um aus dem Anfangswert y_0 den zusätzlichen Startwert y_1 zu gewinnen, sodass man insgesamt ein explizites Verfahren der Ordnung 3 erhält?
Hinweis. Man denke kurz über die Aussagen von Aufgabe 50–51 nach.

Programmieraufgabe 17. Man implementiere das Prädiktor-Korrektor-Verfahren für das explizite Euler-Verfahren als Prädiktor und das implizite Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung 3 als Korrektor in Form einer MATLAB-Funktion

```
y = predcor(M,t,y0,y1,f)
```

Dabei ist $t \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor mit dem Stützstellen, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^d$ sind Spaltenvektoren mit den Startwerten und f ist ein Funktionshandle für die Funktion $f(x,y)$. Der Parameter M gibt die Anzahl der Prädiktorschritte an. Der Ausgabewert ist eine Matrix $y \in \mathbb{R}^{d \times n}$, deren Spalten gerade die Approximationen zu den Zeitpunkten t sind. Verifizieren Sie Ihre Antworten zu Aufgabe 52 numerisch.