Markus Melenk
Dirk Praetorius Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

15. März 2006

Aufgabe 4*. Zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existieren eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine obere Block-Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & * & \dots & * \\ 0 & R_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & R_k \end{pmatrix},$$

sodass die folgenden Aussagen gelten:

- $R = Q^T AQ$.
- Es gilt entweder $R_j \in \mathbb{R}$ oder $R_j \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
- Ist $R_j \in \mathbb{R}$, so ist R_j Eigenwert von A.
- Ist $R_j \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so hat R_j zwei komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, die auch Eigenwerte von A sind.

Diese Faktorisierung von A bezeichnet man als *reelle Schur-Faktorisierung*.

Hinweis. Die folgenden Hinweise geben die Beweisstruktur und sind schrittweise zu beweisen:

- Der Beweis wird mittels Induktion nach n geführt.
- Im Induktionsschritt hat A entweder nur reelle Eigenwerte, oder mindestens einen komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. (Der erste Fall ist in Aufgabe 1 schon bewiesen.)
- Sei $v = x + iy$ ein Eigenvektor zu λ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann sind x, y linear unabhängig über $\mathbb{R}$.
- Mit der Matrix $\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ und der Matrix $X = [x\ y] \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ gilt $AX = X\widetilde{R}_1$.
- Wähle eine Orthonormalbasis $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ von $\operatorname{span}\{x, y\}$, ergänze zu einer Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ und definiere die zugehörige orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Nun betrachte $Q^T AQ$.

Aufgabe 5*. Zu gegebenen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$ ist ein Skalar $\mu \in \mathbb{K}$ mit

$$\|Ax - \mu x\|_2 = \min_{\nu\in\mathbb{K}} \|Ax - \nu x\|_2$$

zu finden. Man zeige, dass dieses Minimum *eindeutig* im Rayleigh-Quotienten $\mu = x \cdot Ax/\|x\|_2^2$ angenommen wird.

Aufgabe 6. Die n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ einer selbstadjungierten Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind reell. Gilt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, so folgt die Variationsformulierung

$$\lambda_j = \max_{\substack{V\leq\mathbb{R}^n \\ \dim V \leq n-j}} \min_{x\in V^\perp\backslash\{0\}} \frac{x\cdot Ax}{\|x\|_2^2} = \min_{\substack{V\leq\mathbb{R}^n \\ \dim V\leq j-1}} \max_{x\in V^\perp\backslash\{0\}} \frac{x\cdot Ax}{\|x\|_2^2} \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Hinweis. Man arbeitet mit Basisdarstellungen von x bezüglich einer Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren zu A. Man zeigt jeweils Gleichheit zu λ_j, indem man beide Ungleichungen überprüft.

Aufgabe 7. Für Unterräume $V, W \le \mathbb{K}^n$ definieren wir

$$d(V,W) := \begin{cases} 1, & \text{für } \dim V \neq \dim W \\ \sup\limits_{v \in V \setminus \{0\}} \inf\limits_{w \in W} \dfrac{\|v-w\|_2}{\|v\|_2}, & \text{für } \dim V = \dim W, \end{cases}$$

vgl. Definition 1.20. und Satz 1.31. Man zeige, dass d eine Metrik auf der Menge der Unterräume von $\mathbb{K}^n$ ist. Ferner zeige man im Fall $\dim V = \dim W$ die folgenden Aussagen:

(i) $d(V,W) = \|\Pi_{W^\perp}\Pi_V\|_2$, wobei $\Pi_V, \Pi_{W^\perp}$ die Orthogonalprojektionen auf V und $W^\perp$ sind.

(ii) $d(V,W) = d(V^\perp, W^\perp)$.

(iii) Aus $V \cap W^\perp = \{0\}$ folgt $d(V,W) < 1$.

Hinweis. (i) Die Orthogonalprojektion Π_W auf W löst zu gegebenem $v \in \mathbb{K}^n$ das Bestapproximationsproblem $\|v - \Pi_W v\|_2 = \inf_{w\in W} \|v-w\|_2$, und es gilt $\Pi_{W^\perp} = id - \Pi_W$. (ii) folgt aus (i), (iii) folgt mittels Kompaktheitsschluss.

Programmieraufgabe 2. Man schreibe eine MATLAB-Funktion `output = jacobi(A,eps)`, die für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das Jacobi-Verfahren durchführt. Dabei ist in jedem Schritt das jeweils größte Offdiagonal-Element a_{jk} zu eliminieren (vgl. Algorithmus 1.13 sowie Satz 1.14). Die Jacobi-Iteration wird beendet, wenn $\operatorname{off}(A_\ell) \le \varepsilon$ gilt. Als Ergebnis liefere die Funktion die Folge der Diagonalen von A_ℓ, d.h. `output(:,ell) = diag(`A_ℓ`)`. Die Dimension `size(output,2)` ist somit gerade die Anzahl an Iterationen. Die Matrix A wird im Programm selbstverständlich sukzessive überschrieben.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 21.03.2005, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Mittwoch 22.03.2005, 12:00 Uhr, per Mail an `dirk.praetorius@tuwien.ac.at` (Betreff: *Numerik UE Matlab*). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung am 22.03.2005 vorzubereiten.