Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

22. März 2006

Aufgabe 8*. Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Es bezeichne $r(x)$ den Rayleigh-Quotienten zu A in x. Die Matrix A sei diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, d.h. für eine geeignete reguläre Matrix $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $D := V^{-1}AV$ eine Diagonalmatrix, und die Eigenwerte $\lambda_j = d_{jj} \in \mathbb{R}$ von A stehen auf der Diagonalen von D. In diesem Fall gilt die Fehlerabschätzung

$$\min_{1\le j\le n} |\lambda_j - r(x)| \le \operatorname{cond}_2(V)\|Ax - r(x)x\|_2.$$

Ist A symmetrisch, so folgere man

$$\min_{1\le j\le n} |\lambda_j - r(x)| \le \|Ax - r(x)x\|_2.$$

Hinweis. Man verwende den Satz von Bauer-Fike.

Aufgabe 9*. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$. Ist dann der Rayleigh-Quotient $r(x)$ zu A in x hinreichend nahe an einem einfachen Eigenwert von A, so gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\min_{1\le j\le n} |\lambda_j - r(x)| \le C\,\|Ax - r(x)x\|_2^2.$$

Hinweis. Man sortiere die Eigenwerte $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n$ und betrachte das Intervall mit $\lambda_j \le r(x) < \lambda_{j-1}$ und $|r(x) - \lambda_j| < |r(x) - \lambda_{j-1}|$. Ferner erinnere man sich an die Orthogonalitätseigenschaft des Rayleigh-Quotienten aus Aufgabe 5.

Aufgabe 10. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar und $\mathcal{T}$ ein k-dimensionaler A-invarianter Unterraum mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Sei $Q \in \mathbb{K}^{n\times k}$ mit orthogonalen Spalten und $\mathcal{S} := \operatorname{span}(Q) \le \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$\forall \lambda \in \sigma(\overline{Q}^T AQ)\; \exists j = 1, \dots, k \quad |\lambda_j - \lambda| \le C\, d(\mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

Hinweis. Es sei $T \in \mathbb{K}^{n\times k}$ mit orthogonalen Spalten und $\operatorname{span}(T) = \mathcal{T}$. Ferner schreiben wir der Konsistenz halber $S := Q$. Betrachte die Singulärwertzerlegung $\overline{S}^T T = U\Sigma\overline{V}^T$. Dann gilt zum einen $\|id - \Sigma^2\|_2 = d(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. Ferner existieren Matrizen $\widetilde{S}, \widetilde{T} \in \mathbb{K}^{n\times k}$ mit orthogonalen Spalten, $\operatorname{span}(\widetilde{S}) = \mathcal{S}$ und $\operatorname{span}(\widetilde{T}) = \mathcal{T}$ sowie $\|S - T\|_2 \le d(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. Ein Störungsargument nach Bauer-Fike liefert die Behauptung.

Aufgabe 11. Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es eine Folge (A_n) von diagonalisierbaren Matrizen, die gegen A konvergiert, d.h. die diagonalisierbaren Matrizen liegen dicht in $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Man kann die Folge (A_n) sogar so wählen, dass alle Eigenwerte der Folgenglieder A_n einfach sind. Insbesondere kann es also keinen stabilen numerischen Algorithmus geben, der die Jordansche Normalform von A berechnet.

Hinweis. Man stelle A in Jordanscher Normalform vor und modifiziere diese geeignet.

Aufgabe 12. Seien V und W k-dimensionale Unterräume vom $\mathbb{R}^n$ sowie $V_\mathbb{C} := \mathrm{span}_\mathbb{C}(V)$ und $W_\mathbb{C} := \mathrm{span}_\mathbb{C}(W)$ die aufgespannten komplexen Unterräume vom $\mathbb{C}^n$. Man zeige $d_\mathbb{R}(V,W) = d_\mathbb{C}(V_\mathbb{C}, W_\mathbb{C})$, wobei $d_\mathbb{K}(\cdot,\cdot)$ die Metrik auf den Unterräumen von $\mathbb{K}^n$ bezeichne (vgl. Aufgabe 7). Wenn möglich finde man zwei Beweise: Zum einen einen direkten, elementaren Beweis und zum anderen einen Beweis, der auf den Ergebnissen der letzten Übungsstunde basiert.

Programmieraufgabe 3. Man schreibe eine MATLAB-Funktion

```
[lambda,eta] = inviter(A,lambda0,eps)
```

zur Inversen Iteration mit Shift, der als Input eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eine Startschätzung $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ und eine Toleranz $\varepsilon > 0$ übergeben wird. Als Ergebnis liefere die Funktion die Folge (λ_ℓ) der Approximationen des λ_0 am nächsten gelegenen Eigenwerts $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie die Folge (η_ℓ) der Fehlerschätzer $\eta_\ell := \|Ax_\ell - r(x_\ell)x_\ell\|_2$, vgl. Aufgabe 8. Zum Abbruch des Verfahrens verwende man das Kriterium $\eta_\ell \le \varepsilon$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 28.03.2006, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Mittwoch 29.03.2006, 12:00 Uhr, per Mail an `dirk.praetorius@tuwien.ac.at` (Betreff: *Numerik UE Matlab*). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung am Freitag 31.03.2006 vorzubereiten.

Achtung: Die nächste Übung ist am Freitag 31.03.2006, 14:00 - 15:30 Uhr. Stattdessen ist am Mittwoch 29.03.2006 um 17:00 - 18:30 Uhr die Vorlesung.