Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
29. März 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 4

Aufgabe 13*. Verallgemeinern Sie Aufgabe 3 auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Gegeben seien eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und Indizes $1 \le j,k,\ell \le n$ mit $j \neq k$ und $\ell \notin \{j,k\}$. Gilt $a_{k\ell} \neq 0$, so existiert eine Givens-Rotation $G \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} c & -se^{-it} \\ +se^{+it} & c \end{pmatrix},$$

sodass für $B := \overline{G}^T AG$ gilt $b_{k\ell} = 0$ sowie $b_{pq} = a_{pq}$ für alle Indizes $p,q \notin \{j,k\}$.

Aufgabe 14*. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine obere Hessenbergmatrix. Dann lässt sich die QR-Faktorisierung $A = QR$ von A mit Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$ berechnen. Ferner kann das Produkt $B := RQ$ mit Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$ berechnet werden, und B ist eine obere Hessenbergmatrix. Ist A zusätzlich selbstadjungiert, so sind beide Operationen mit linearem Aufwand $\mathcal{O}(n)$ durchführbar, und B ist eine selbstadjungierte Tridiagonalmatrix.

Aufgabe 15. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ in Schur-Faktorisierung $A = \overline{Q}^T RQ$. Wie kann man zu einem einfachen Eigenwert $\lambda = r_{jj} \in \mathbb{K}$ einen zugehörigen Eigenvektor bestimmen?

Aufgabe 16. Zu einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definieren wir $C := \begin{pmatrix} 0 & A \\ \overline{A}^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$. Man zeige, dass C eine selbstadjungierte Matrix ist, deren nicht-negative Eigenwerte genau die Singulärwerte von A sind.

Programmieraufgabe 4. Man schreibe eine MATLAB-Funktion `B = hessenberg(A,eps)`, die eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ in eine obere Hessenbergmatrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ überführt, die zu A ähnlich ist. Bei der Transformation sollen Einträge B_{jk}, die mathematisch Null sind, explizit auf den Wert Null gesetzt werden. Falls $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert ist, soll die Funkion insbesondere eine selbstadjungierte Tridiagonalmatrix zurückliefern. Dabei gelten Einträge a_{jk} und a_{kj} von A als numerisch gleich, wenn entweder $\max\{|a_{jk}|, |a_{kj}|\} \le \varepsilon$ oder $|a_{jk} - a_{kj}| \le \varepsilon |a_{jk}|$. Zum Test überprüfe man mit dem MATLAB-Befehl `eig`, ob A und B dieselben Eigenwerte haben.

Programmieraufgabe 5. Man schreibe eine MATLAB-Funktion `lambda = qrit(A,eps)`, die das QR-Verfahren mit Rayleigh-Shift und Deflation realisiert, wobei $\varepsilon > 0$ der Parameter für die Deflation ist, und $\lambda \in \mathbb{C}^n$ der Vektor der Eigenwerte.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben (mit Stern) bis spätestens Dienstag 04.04.2006, 12:00 Uhr, im Sekretariat von Frau Kovalj (4. Stock, grün). Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Mittwoch 05.04.2006, 12:00 Uhr, per Mail an `dirk.praetorius@tuwien.ac.at` (Betreff: *Numerik UE Matlab*). Die mündlichen Aufgaben sind zur Übung am 05.04.2006 vorzubereiten.