Markus Melenk
Dirk Praetorius

Sommersemester 2006
05. April 2006

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Numerik von Differentialgleichungen

Serie 5

Aufgabe 17*. Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$y(a) = y_0, \quad y' = f(x,y) \text{ in } [a,b] \tag{1}$$

verwenden wir ein explizites Einschrittverfahren und erhalten eine Folge (y_ℓ) gemäß Rekursion

$$y_{\ell+1} = y_\ell + h_\ell \Phi(x_\ell, y_\ell, h_\ell) \quad \text{für } \ell = 0, \dots, n-1.$$

Ferner sei $(\widetilde{y}_\ell)$ die Folge der rundungsfehlerbehafteten Werte, und es gelte

$$\widetilde{y}_{\ell+1} = \widetilde{y}_\ell + h_\ell \Phi(x_\ell, \widetilde{y}_\ell, h_\ell) + \varepsilon_\ell,$$

wobei die Rundungsfehler global beschränkt seien durch $\varepsilon > 0$, d.h. $|\varepsilon_\ell| \le \varepsilon$. Ist die Verfahrensfunktion $\Phi(x,y,h)$ Lipschitz-stetig in y mit Konstante $L > 0$, so gilt für den Fehler

$$|y_\ell - \widetilde{y}_\ell| \le (|y_0 - \widetilde{y}_0| + \ell\varepsilon) \exp(L|x_\ell - x_0|).$$

Aufgabe 18*. Man kann (1) auch mit einem impliziten Einschrittverfahren lösen,

$$y_{\ell+1} = y_\ell + h_\ell \Phi(x_\ell, y_\ell, y_{\ell+1}, h_\ell) \tag{2}$$

für $\ell = 0, \dots, n-1$. Im Vergleich mit einem expliziten Verfahren hängt die Verfahrensfunktion also zusätzlich von $y_{\ell+1}$ ab. Wir nehmen an, dass Φ Lipschitz-stetig ist im $y_{\ell+1}$-Argument. Man zeige, dass dann die implizite Gleichung (2) für hinreichend kleines h_ℓ eine eindeutige Lösung $y_{\ell+1}$ besitzt.

Aufgabe 19. Man beweise die folgende Formulierung des **Lemma von Gronwall**: Seien (δ_j), (e_j), (η_j) nicht-negative Folgen in $\mathbb{R}$, und es gelte

$$e_{j+1} \le (1+\delta_j) e_j + \eta_j \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Dann folgt (mit der üblichen Konvention für die leere Summe) die Abschätzung

$$e_j \le \Big(e_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \eta_k\Big) \exp\Big(\sum_{k=0}^{j-1} \delta_k\Big) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 20. Analog zur Vorlesung zeige man, dass das modifizierte Euler-Verfahren,

$$y_{\ell+1} = y_\ell + h_\ell \Phi(x_\ell, y_\ell, h_\ell) \quad \text{mit} \quad \Phi(x, y, h) = f\big(x + h/2\,,\ y + (h/2)f(x, y)\big)$$

für $\ell = 0, \dots, n-1$, ein explizites Einschrittverfahren mit Konsistenzordnung 2 ist.

Programmieraufgabe 6. Das explizite Euler-Verfahren ist durch $y_{\ell+1} = y_\ell + h_\ell f(x_\ell, y_\ell)$ definiert. Man implementiere für den Spezialfall $f(x, y) = M(x)y + g(x)$ das explizite Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite $h = (b-a)/n$ zur Lösung des Anfangswertproblems (1). Dabei kann die gesuchte Lösung $y : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ vektorwertig sein, und $M(x)$ ist in diesem Fall eine $d \times d$-Matrix. Der MATLAB-Funktion

```
[x,y] = euler(a,b,n,y0,M,g)
```

sollen neben den Daten a, b, n und y_0 auch die Funktion-Handles der Funktionen `Mx = M(x)` und `gx = g(x)` übergeben werden. Die übergebenen Funktionen können dann beispielsweise mit `Mx = feval(M,x)` aus der Funktion `euler` heraus aufgerufen werden. Als Rückgabeparameter liefere die Funktion `euler` den Stützstellenvektor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ und die Matrix der dazugehörigen Funktionswerte $y \in \mathbb{R}^{d\times(n+1)}$, d.h. die ℓ-te Spalte von y entspricht der Approximation y_ℓ an der Stelle x_ℓ.

Programmieraufgabe 7. Das implizite Euler-Verfahren ist durch $y_{\ell+1} = y_\ell + h_\ell f(x_{\ell+1}, y_{\ell+1})$ definiert. Unter denselben Voraussetzungen wie in der letzten Programmieraufgabe schreibe man eine MATLAB-Funktion

```
[x,y] = ieuler(a,b,n,y0,M,g)
```

die das implizite Euler-Verfahren realisiert. Man vergleiche die Fehler $|y(1) - y_n(1)|$ für explizites und implizites Euler-Verfahren im Plot über n. Als Beispiel diene das Modellproblem

$$y(0) = 1, \quad y' = \lambda y \text{ auf } [0, 1]$$

mit exakter Lösung $y(x) = \exp(\lambda x)$ für verschiedene konstante Werte von $\lambda \in \{\pm 1, \pm 10\}$.